

高二数学寒假作业(复习) Day 4 (练习时长: 40 分钟)

姓名: \_\_\_\_\_ 完成评价: \_\_\_\_\_

## 一、核心知识的归纳总结和梳理模块

### (一) 直线和圆锥曲线的位置关系

判断直线  $l$  与圆锥曲线  $C$  的位置关系时, 通常将直线  $l$  的方程  $Ax+By+C=0(A, B$  不同时为  $0)$  代入圆锥曲线  $C$  的方程  $F(x, y)=0$ , 消去  $y$ (也可以消去  $x$ ) 得到一个关于变量  $x$ (或变量  $y$ ) 的一元方程.

$$\text{即} \begin{cases} Ax+By+C=0, \\ F(x, y)=0, \end{cases} \quad \text{消去 } y, \text{ 得 } ax^2+bx+c=0.$$

(1) 当  $a \neq 0$  时, 设一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  的判别式为  $\Delta$ , 则  $\Delta > 0 \Leftrightarrow$  直线与圆锥曲线  $C$  相交;

$\Delta = 0 \Leftrightarrow$  直线与圆锥曲线  $C$  相切;

$\Delta < 0 \Leftrightarrow$  直线与圆锥曲线  $C$  相离.

(2) 当  $a = 0, b \neq 0$  时, 即得到一个一次方程, 则直线  $l$  与圆锥曲线  $C$  相交, 且只有一个交点, 此时, 若  $C$  为双曲线, 则直线  $l$  与双曲线的渐近线的位置关系是平行; 若  $C$  为抛物线, 则直线  $l$  与抛物线的对称轴的位置关系是平行或重合.

### (二) “弦” 的问题

#### 1. 弦长公式

设斜率为  $k(k \neq 0)$  的直线  $l$  与圆锥曲线  $C$  相交于  $A, B$  两点,  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

$$\text{则 } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1-x_2| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} =$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}} |y_1-y_2| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2}.$$

#### 2. 处理中点弦问题常用的求解方法

##### (1) 点差法:

即设出弦的两端点坐标后, 代入圆锥曲线方程, 并将两式相减, 式中含有  $x_1+x_2, y_1+y_2,$

$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$  三个未知量, 这样就直接联系了中点和直线的斜率, 借用中点公式即可求得斜率.

##### (2) 根与系数的关系:

即联立直线与圆锥曲线的方程得到方程组, 化为一元二次方程后由根与系数的关系求解.

注意: 中点弦问题常用的两种求解方法各有弊端: 根与系数的关系在解题过程中易产生漏解, 需关注直线的斜率问题; 点差法在确定范围方面略显不足.

## 二、练习模块

### 一、单项选择题

1. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的一条渐近线为  $l: y = \frac{1}{2}x$ , 则  $C$  的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$                       B.  $\sqrt{5}$                       C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 已知抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 点  $P(m, n)$  在抛物线  $C$  上. 若  $|PF| = 3$ , 则  $m =$  ( )

- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

3. 已知  $P$  为椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上的动点.  $A(-1, 0), B(1, 0)$ , 且  $|PA| + |PB| = 4$ , 则  $b^2 =$  ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

4. 已知  $F$  是双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左焦点,  $O$  为坐标原点, 过点  $F$  且斜率为  $\frac{\sqrt{7}}{3}$  的直线与  $E$  的右支交于点  $M$ ,  $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NF}$ ,  $MF \perp ON$ , 则  $E$  的离心率为 ( )

- A. 3                      B. 2                      C.  $\sqrt{3}$                       D.  $\sqrt{2}$

5. 已知椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 作垂直于  $x$  轴的直线交椭圆于  $A, B$  两点, 作垂直于  $y$  轴的直线交椭圆于  $C, D$  两点, 且  $|AB| = |CD|$ , 两垂线相交于点  $P$ , 若点  $P$  的轨迹是某种曲线 (或其一部分), 则该曲线是 ( ).

- A. 圆                      B. 椭圆                      C. 双曲线                      D. 抛物线

6. 已知抛物线  $y^2 = 2px$ , 过其焦点  $F$  的直线与该抛物线交于  $A, B$  两点,  $A$  在第一象限, 且  $AF = 2FB$ , 则直线  $AB$  的斜率为 ( )

- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $2\sqrt{2}$                       D. 无法确定

7. 已知抛物线  $M: x^2 = 4y$ , 圆  $C: x^2 + (y-3)^2 = 4$ , 在抛物线  $M$  上任取一点  $P$ , 向圆  $C$  作两条切线  $PA$  和  $PB$ , 切点分别为  $A, B$ , 则  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-4, 0]$                       B.  $[-4, 0)$                       C.  $(-8, 0]$                       D.  $[-8, 0)$

8. 已知  $A, B$  是椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  与双曲线  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$  的公共顶点,  $P$  是双曲线在第一象限上的一点, 直线  $PA, PB$  交椭圆于点  $M, N$ . 若直线  $MN$  过椭圆的右焦点  $F$ , 则  $\triangle MAB$  的面积为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$                       B. 2                      C. 3                      D. 4

## 二、多项选择题

9. 已知抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ ，点  $M(x_0, y_0)$  在抛物线  $C$  上，若  $|MF| = 4$ ，则

( )

- A.  $x_0 = 3$                       B.  $y_0 = 3$   
C.  $|OM| = \sqrt{21}$                       D.  $F$  的坐标为  $(0, 1)$

10. 已知椭圆  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 3)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，过点  $F_1$  的直线  $l$  交椭圆于  $A, B$

两点，若  $|AB|$  的最小值为 4，则 ( )

- A. 椭圆的短轴长为  $\sqrt{6}$                       B.  $|AF_2| + |BF_2|$  最大值为 8  
C. 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       D. 椭圆上不存在点  $P$ ，使得  $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$

11. 已知曲线  $C: x^2 \cos \alpha + y^2 = 1$ ，其中  $\alpha \in [0, \pi]$ ，则下列结论正确的是 ( )

- A. 方程表示的曲线是椭圆或双曲线  
B. 若  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ，则曲线的焦点坐标为  $(-1, 0)$  和  $(1, 0)$   
C. 若  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ ，则曲线的离心率  $e \in \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

D. 若方程表示的曲线是双曲线，则其焦距的最小值为  $2\sqrt{2}$

## 三、填空题

12. 过点  $(1, 0)$  的直线  $l$  与抛物线  $y^2 = x$  交于不同两点  $A, B$ ，则  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \underline{\hspace{2cm}}$ . ( $O$  为坐标原点)

13. 已知双曲线  $C$  的离心率为  $e$ ，左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ，点  $M$  在  $C$  的左支上运动且不与顶点重合，记  $I$  为  $\triangle MF_1F_2$  的内心， $\lambda = \frac{\tan \angle IF_1F_2}{\tan \angle IF_2F_1}$ ，若  $e \in [2, 4]$ ，则  $\lambda$  的取值范围为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 阿基米德是古希腊著名的数学家、物理学家，他利用“逼近法”得到椭圆的面积，除以圆周率  $\pi$  等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积. 已知面积为  $6\sqrt{2}\pi$  的椭圆，以  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左焦点为  $F(-1, 0)$ ， $P$  为椭圆上任意一点，点  $Q$  的坐标为  $(1, 1)$ ，则  $|PQ| + |PF|$  的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

#### 四、解答题

15. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的焦距为  $2\sqrt{2}$ ，离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(1) 求  $C$  的标准方程；

(2) 若  $A\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ ，直线  $l: x = ty + \frac{3}{2} (t > 0)$  交椭圆  $C$  于  $E, F$  两点，且  $\triangle AEF$  的面积为  $\frac{\sqrt{46}}{2}$ ，求  $t$  的值。