

## 数学学科寒假作业（复习） Day 9 (练习时长：40 分钟)

姓名： 完成评价：

### 一、核心知识的归纳总结和梳理模块

#### 1.二项式定理

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n$ ，可以简写成  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ .

(1)这个公式称为二项式定理.

(2)展开式：等号右边的式子称为  $(a+b)^n$  的二项展开式，展开式中一共有  $n+1$  项.

(3)二项式系数：各项的系数  $C_n^k (k=0,1,2, \cdots, n)$  称为二项式系数.

(4)二项式通项： $(a+b)^n$  展开式的第  $k+1$  项称为二项式通项，记作  $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ .

注意点：(1)每一项中  $a$  与  $b$  的指数和为  $n$ ；(2)各项中  $a$  的指数从  $n$  起依次减小 1，到 0 为止，各项中  $b$  的指数从 0 起依次增加 1，到  $n$  为止. (3) $a$  与  $b$  的位置不能交换；(4) $C_n^k a^{n-k} b^k$  表示的是第  $(k+1)$  项.

#### 2.杨辉三角

$(a+b)^1$ .....	1	1					
$(a+b)^2$ .....	1	2	1				
$(a+b)^3$ .....	1	3	3	1			
$(a+b)^4$ .....	1	4	6	4	1		
$(a+b)^5$ .....	1	5	10	10	5	1	
$(a+b)^6$ .....	1	6	15	20	15	6	1
			.....	.....			

(1)在同一行中，每行两端都是 1，与这两个 1 等距离的项的系数相等；

(2)在相邻的两行中，除 1 以外的每一个数都等于它“肩上”的两个数的和，

即  $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$ .

#### 3.二项式系数的增减性与最值

(1)增减性：当  $k < \frac{n+1}{2}$  时，二项式系数逐渐增大的；当  $k > \frac{n+1}{2}$  时，二项式系数是逐渐减小的.

(2)最大值：当  $n$  为偶数时，中间一项的二项式系数  $C_n^{\frac{n}{2}}$  最大；当  $n$  为奇数时，中间两项的二项式系数  $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ ， $C_n^{\frac{n+1}{2}}$  相等，且同时取得最大值.

注意点：(1)当  $n$  为偶数时，中间项的二项式系数最大，有一项；

(2)当  $n$  为奇数时，中间项的二项式系数最大，有两项.

#### 4.求多项式积的特定项的方法——“双通法”

所谓的“双通法”是根据多项式与多项式的乘法法则得到， $(a+bx)^n(s+tx)^m$  的展开式中一般项为  $T_{k+1} \cdot T_{r+1} = C_n^k a^{n-k} (bx)^k C_m^r s^{m-r} (tx)^r$ ，再依据题目中对指数的特殊要求，确定  $r$  与  $k$  所满足的条件，进而求出  $r$ ， $k$  的取值情况.

## 二、练习模块

### 一、单选题

- 在  $(x^2 + \sqrt{x})^5$  的二项展开式中， $x^4$  的系数为（ ）  
A. 5                      B. 10                      C. 15                      D. 20
- 在  $(x - \frac{2}{x^2})^6$  的展开式中，常数项为（ ）  
A. 60                      B. 15                      C. -60                      D. -15
- 已知  $(1+x)(a-x)^6 = a_0 + a_1x + \cdots + a_7x^7$ ，若  $a_0 + a_1 + \cdots + a_7 = 0$ ，则  $a_3 =$ （ ）  
A. -5                      B. -20                      C. 15                      D. 35
- 在  $(ax-1)(2x-1)^3$  的展开式中，若各项系数的和为 0，则  $x^3$  的系数为（ ）  
A. 20                      B. -20                      C. 30                      D. -30
- $(x + \frac{2}{x})(x-1)^6$  的展开式中，常数项为（ ）  
A. 12                      B. -12                      C. -10                      D. 10
- $(1+x)^5$  的展开式中系数最大的项为（ ）  
A.  $10x^4$  和  $10x^3$       B.  $10x^4$  和  $10x^2$       C.  $10x^3$  和  $10x^2$       D.  $10x^3$  和  $10x$
- $3^{86}$  被 8 除所得的余数为（ ）  
A. 1                      B. 2                      C. 0                      D. 5
- 若  $(\frac{3}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x})^n$  的展开式中所有二项式系数的之和为 32，则展开式中的常数项是（ ）  
A. -270                      B. -90                      C. 270                      D. 90

### 二、多选题

- 已知  $(a+b)^n$  的展开式中第 7 项的二项式系数最大，则  $n$  的值可以为（ ）  
A. 10                      B. 11                      C. 12                      D. 13
- 以下关于杨辉三角的猜想中，正确的有（ ）

第 0 行				1							
第 1 行				1		1					
第 2 行			1		2		1				
第 3 行		1		3		3		1			
第 4 行		1		4		6		4		1	
第 5 行	1		5		10		10		5		1

A. 由在相邻的两行中，除 1 以外的每一个数都等于它‘肩上’两个数的和”猜想：

$$C_{n+1}^r = C_n^{r-1} + C_n^r$$

B.  $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + \cdots + C_{12}^2 = 286$

C. 第 2024 行中，从左到右看，第 1012 个数最大

D. 第 100 行的所有数中，最大的数为  $C_{100}^{50}$

11. 下列对二项式  $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$  的展开式的说法正确的是：（ ）.

A. 第 3 项的系数为 40    B. 第 4 项的二项式系数为 10    C. 不含常数项    D. 系数和为 32

### 三、填空题

12.  $\left(x^2 + \frac{6}{x}\right)(x-1)^7$  的展开式中含  $x^5$  项的系数为\_\_\_\_\_。（用数字作答）

13.  $(x-2y)(x+y)^6$  的展开式中  $x^3y^4$  的系数为\_\_\_\_\_。（用数字作答）

14. 在  $\left(x - \frac{1}{x}\right)^7$  的二项展开式中，系数最小的项为\_\_\_\_\_.

### 四、解答题

15. 已知  $(2x-1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )，若  $(2x-1)^n$  的展开式中第 4 项与第 8 项的二项式系数相等.

(1)求  $n$  的值；

(2)求  $x^2$  的系数；

(3)求  $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$  的值.

