

## 5.1.2 利用二分法求方程的近似解

班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 小组\_\_\_\_\_

### 一、学习目标

- 1、了解二分法是求方程近似解的一种方法；
- 2、体会函数零点与方程根之间的关系，初步形成用函数观点处理问题的意识；
- 3、根据具体函数的图像，能够借助计算器或计算机用二分法求相应方程的近似解。

### 二、重点、难点

重点:二分法基本思想的理解，用二分法求方程近似解的步骤

难点:求方程近似解一般步骤的理解和概括

### 三、导学流程

#### 【题型 1：二分法概念的理解】

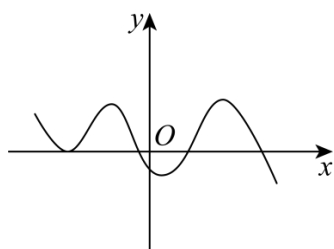
例 1. 下列函数中不能用二分法求零点的是（ ）

- A.  $y = 3x - 1$     B.  $y = x^3$     C.  $y = |x|$     D.  $y = \ln x$

变式 1. 下列关于二分法的叙述中，正确的是（ ）

- A. 用二分法可求所有函数零点的近似值  
 B. 用二分法可求函数零点的近似值，可精确到小数点后任一位  
 C. 二分法无规律可循，无法在计算机上完成    D. 只能用二分法求函数的零点

变式 2. 函数  $y = f(x)$  的图象如图所示，其中零点的个数与可以用二分法求其零点近似值的个数分别是（ ）



- A. 4, 4    B. 3, 4  
 C. 4, 3    D. 5, 4

变式 3. 用二分法求方程  $x + \lg x - 3 = 0$  的近似解，以下区间可以作为初始区间的是（ ）

- A.  $[1, 2]$     B.  $[2, 3]$     C.  $[3, 4]$     D.  $[4, 5]$

#### 【题型 2：二分法求方程的零点】

例 2. 用二分法求函数  $f(x) = 5^x + 7x - 2$  的一个零点的近似值，其参考数据如下：

x	0.0625	0.09375	0.125	0.15625	0.1875
$f(x)$	-0.4567	-0.1809	0.0978	0.3797	0.6647

根据上述数据，可得 $f(x) = 5^x + 7x - 2$ 的一个零点近似值（误差不超过 0.025）为（ ）

- A. 0.09375      B. 0.109375      C. 0.125      D. 0.078125

变式 1. 用二分法研究函数 $f(x) = x^5 + 8x^3 - 1$ 的零点时，第一次经过计算得 $f(0) < 0$ ， $f(0.5) > 0$ ，则其中一个零点所在区间和第二次应计算的函数值分别为（ ）

- A. (0,0.5),  $f(0.125)$       B. (0,0.5),  $f(0.25)$       C. (0.5,1),  $f(0.75)$       D. (0,0.5),  $f(0.375)$

变式 2. 已知函数 $f(x) = \log_2 x - \frac{1}{x}$ ，在区间(1,2)内存在一个零点，在利用二分法求函数 $f(x)$ 近似解的过程中，第二次求得的区间中点值为\_\_\_\_\_.

变式 3. 已知函数 $y = x^3 + x^2 + x - 1$ 在区间(0,1)上有且仅有一个零点，用二分法求该零点的近似值.（结果精确到 0.1）

### 【题型 3：二分法求方程的近似解】

例 3. 设 $f(x) = 2^x + x - 8$ ，用二分法求方程 $2^x + x - 8 = 0$ 在[1,5]上的近似解时，经过两次二分法后，可确定近似解所在区间为（ ）

- A. [1,2]或[2,3]都可以      B. [2,3]      C. [1,2]      D. 不能确定

变式 1.（多选）下列说法正确的是（ ）

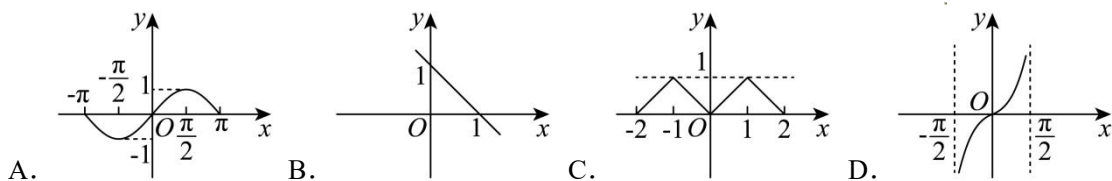
- A. 函数 $f(x) = x^2 + 2x - 8$ 的零点是 $(-4,0)$ ， $(2,0)$   
 B. 方程 $e^x = 3 + x$ 有两个解  
 C. 函数 $y = 3^x$ ， $y = \log_3 x$ 的图象关于 $y = x$ 对称  
 D. 用二分法求方程 $3^x + 3x - 8 = 0$ 在 $x \in (1,2)$ 内的近似解的过程中得到 $f(1) < 0$ ， $f(1.5) > 0$ ， $f(1.25) < 0$ ，则方程的根落在区间(1,1.25)上

变式 2. 用二分法求方程 $x^3 - 2x - 5 = 0$ 的实根，由计算器可算得 $f(2) = -1$ ， $f(3) = 16$ ， $f(2.5) = 5.625$ ，那么下一个有根区间为\_\_\_\_\_.

## 四、巩固训练

### 一、单选题

- 函数 $f(x) = x + \ln x - 5$ 的零点所在的一个区间是（ ）  
 A. (0,1)      B. (1,2)      C. (2,3)      D. (3,4)
- 用二分法研究函数 $f(x) = x^2 + 3x - 1$ 的零点时，第一次经过计算发现 $f(0) < 0$ ， $f(0.5) > 0$ ，可得其中一个零点 $x_0 \in (0,0.5)$ ，则第二次还需计算函数值（ ）  
 A.  $f(1)$       B.  $f(-0.5)$       C.  $f(0.25)$       D.  $f(0.125)$
- 下列函数图象与 x 轴均有交点，其中不能用二分法求图中交点横坐标的是下图中的（ ）



4. 用二分法求方程的近似解，精确度为 $\varepsilon$ ，则终止条件为（ ）

- A.  $|x_1 - x_2| > \varepsilon$       B.  $|x_1 - x_2| < \varepsilon$       C.  $x_1 < \varepsilon < x_2$       D.  $x_2 < \varepsilon < x_1$

5. 用二分法求函数 $f(x) = \ln(x+1) + x - 1$ 在区间 $[0,2]$ 上的零点，要求误差不超过 0.01 时，计算中点函数值的次数最少为（ ）

- A. 6      B. 7      C. 8      D. 9

6. (21-22 高一上·全国·课后作业) 已知 $f(x) = 3^x + 3x - 8$ ，用二分法求方程 $3^x + 3x - 8 = 0$ 在区间 $(1,2)$ 内的近似解的过程中得到 $f(1) < 0$ ， $f(1.5) > 0$ ， $f(1.25) < 0$ ，则方程的解落在区间（ ）

- A.  $[1,1.25]$       B.  $[1.25,1.5]$       C.  $[1.5,2]$       D. 不能确定

## 二、多选题

7. (多选) 下列说法正确的是（ ）

- A. 已知方程 $e^x = 8 - x$ 的解在 $(k, k+1)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 内，则 $k = 1$   
 B. 函数 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 的零点是 $(-1,0), (3,0)$   
 C. 函数 $y = 3^x, y = \log_3 x$ 的图象关于 $y = x$ 对称  
 D. 用二分法求方程 $f(x) = 3^x + 3x - 8 = 0$ 在 $x \in (1,2)$ 内的近似解的过程中得到 $f(1) < 0, f(1.5) > 0, f(1.25) < 0$ ，则方程的根落在区间 $(1.25,1.5)$ 上

8. 某同学求函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6.5$ 的零点时,用计算器算得部分函数值如表所示:

$f(2) \approx -1.807$	$f(3) \approx 0.599$	$f(2.5) \approx -0.584$
$f(2.75) \approx 0.012$	$f(2.625) \approx -0.285$	$f(2.6875) \approx -0.136$

则方程 $\ln x + 2x - 6.5 = 0$ 的近似解(精确度 0.1)可取为（ ）

- A. 2.72      B. 2.69      C. 2.61      D. 2.55

9. 下列命题为真命题的是（ ）

- A. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > x - 1$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x - 1$ ”  
 B. 可以用二分法求函数 $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$ 的零点  
 C. 在同一平面直角坐标系中，函数 $y = 10^x$ 与 $y = \lg x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称  
 D. 幂函数 $y = x^{-\frac{2}{3}}$ 在 $(-\infty, 0)$ 是增函数

## 6.1 获取数据的途径

班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 小组\_\_\_\_\_

### 一、学习目标

- 1.了解普查、抽样调查、总体、样本等概念.（数学抽象）
- 2.能根据实际情况选择合适的调查方法解决问题.（数据分析）
- 3.在具体问题情境中，领会抽样调查的优点和局限性，体会不同的抽样可能得到不同的结果.（逻辑推理）

### 二、重点、难点

- 1.理解获取数据的直接与间接途径，如通过调查、实验等直接获取，或从统计报表、年鉴、互联网等间接获取。
- 2.掌握普查和抽样调查，包括其特点、适用情况及不同抽样方法（简单随机抽样、分层抽样、系统抽样等）。
- 3.能根据实际问题合理选择获取数据的途径，需综合考虑研究目的、资源条件、数据准确性要求等因素。
- 4.理解抽样调查中各种抽样方法的原理与操作，如保证简单随机抽样的随机性、合理分层抽样及确定系统抽样的间隔等，且要能正确应用。

### 三、导学流程

#### 题型一、 直接获取与间接获取数据

#### 解题技巧提炼

#### 选择获取数据的途径的依据

选择获取数据的途径主要是根据所要研究问题的类型，以及获取数据的难易程度。有的数据可以有多种获取途径，有的数据只能通过一种途径获取，选择合适的方法和途径能够更好地提高数据的可靠性。

1. 某省新高考中选考科目采用赋分制，具体转换规则和步骤如下：第一步，按照考生原始分从高到低按成绩比例划定A、B、C、D、E共五个等级（见下表）。第二步，将A至E五个等级内的考生原始分，依照等比例转换法则，分别对应转换到100~86、85~71、70~56、55~41和40~30五个分数段，从而将考生的等级转换成了等级分。

等级	A	B	C	D	E
比例	15%	35%	35%	13%	2%
赋分区间	100-86	85-71	70-56	55-41	40-30

赋分公式：
$$\frac{(\text{该区间原始最高分} - \text{原始分})}{(\text{原始分} - \text{该区间原始最低分})} = \frac{(\text{等级赋分区间最高分} - X)}{(X - \text{等级赋分区间最低分})}$$
，计算出来的  $X$  经过四舍五人后即  
为赋分成绩.

某次考试，化学成绩 A 等级的原始最高分为 98 分，最低分为 63 分.学生甲化学原始成绩为 76 分，则该学生的化学赋分分数为（ ）

- A. 85                      B. 88                      C. 91                      D. 95

2. 下列获取的数据属于直接数据的是（ ）

- A. 看报纸获得的数据                      B. 通过问卷调查获得的数据  
C. 通过网络获得的数据                      D. 听广播获得的数据

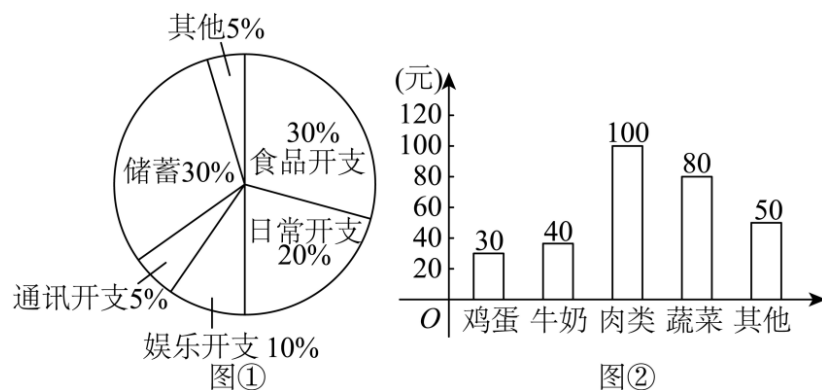
3. 研究下列问题，一般通过试验获取数据的是（ ）

- A. 某城市元旦前后的气温                      B. 某种新型电路元件使用寿命的测定  
C. 电视台想知道某一个节目的收视率                      D. 高中生日平均上网时间

4. 在世界无烟日，小华所在的学习小组为了解本地区大约有多少成年人在吸烟，随机调查了 50 个成年人，结果其中有 15 个成年人吸烟.对于这个关于数据收集与处理的问题，下列说法正确的是（ ）

- A. 调查的方式是抽样调查                      B. 本地区只有 35 个成年人不吸烟  
C. 样本是 15 个吸烟的成年人                      D. 样本容量是 50

5. 小刘一周的总开支分布如图①所示，该周的食品开支如图②所示，则以下说法正确的是（ ）



- A. 娱乐开支比通信开支多 5 元                      B. 日常开支比食品中的肉类开支多 100 元  
C. 娱乐开支金额为 100 元                      D. 肉类开支占储蓄开支的  $\frac{1}{3}$

6. 获取数据的基本途径有\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_等.

7. 直接获取与间接获取数据

\_\_\_\_\_是指通过社会调查或观察、试验等途径获取数据.

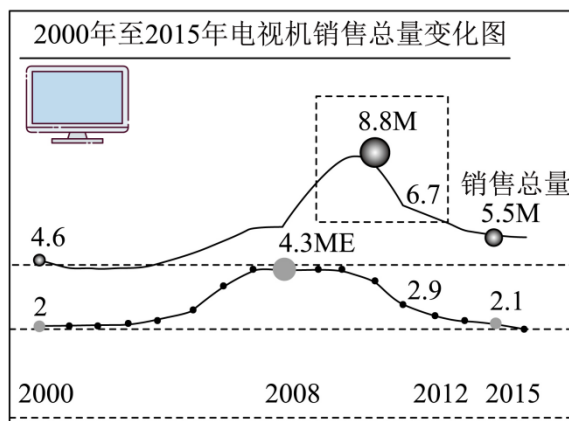
\_\_\_\_\_是指借助各种媒介，包括报纸杂志、统计报表和年鉴、广播、电视或互联网等获取数据。

8. 为了了解我国电视机的销售情况，小张在某网站上下载了此图：

(1) 小张获取数据的途径是什么？

(2) 由图可知，电视机的销售总量在 2011 年达到最大值，你认为电视机销售总量出现下滑的主要原因是什么？

## 题型二、普查与抽样的定义辨析



### 解题技巧提炼

普查：为了掌握调查对象的整体情况，对全体调查对象进行研究的一种调查方式

抽查：从全体调查对象中，按照一定的方法抽取一部分对象作为代表进行调查分析，并以此推断全体调查对象的状况的调查方式

9. 影响获取数据可靠程度的因素包括（ ）

- A. 获取方法设计
- B. 所用专业测量设备的精度
- C. 调查人员的认真程度
- D. 数据的大小

10. 在以下调查中，适合用全面调查的是（ ）

- A. 调查一个班级学生的视力情况
- B. 调查一批玉米种子的发芽率
- C. 调查某城市居民的食品消费结构
- D. 调查一批待售袋装牛奶的细菌数

11. 下列情况适合用抽样调查的是（ ）

- A. 调查某化工厂周围 5 个村庄是否受到污染
- B. 调查某批次汽车的抗撞击能力
- C. 调查某班学生的身高情况
- D. 学校招聘，对应聘人员进行面试

12. 下列调查方式中，可用普查的是（ ）

- A. 调查某品牌电动车的市场占有率
- B. 调查 2023 年杭州亚运会的收视率
- C. 调查某校高三年级的男女同学的比例
- D. 调查一批玉米种子的发芽率

13. 在以下调查中，适合用全面调查的是（ ）

- A. 调查一个水库所有鱼中草鱼所占的比例
- B. 调查一批玉米种子的发芽率
- C. 调查一批炮弹的杀伤半径
- D. 调查一个县各村的粮食播种面积

14. 在以下 4 项调查中：

- ①调查一个 40 人班级的学生每周的体育锻炼时间；
- ②调查某省的一种结核病的发病率；
- ③调查一批食品的合格率；
- ④调查一个水库所有鱼中草鱼所占的比例；

适合用全面调查的是（ ）

- A. ①                      B. ②                      C. ③                      D. ④

15. 若要研究某城市家庭的收入情况，获取数据的途径应该是（ ）

- A. 通过调查获取数据                      B. 通过试验获取数据  
C. 通过观察获取数据                      D. 通过查询获得数据

### 题型三、普查与抽样的合理选择

#### 解题技巧提炼

##### 对普查与抽样调查的理解

(1)普查是一项非常艰巨的工作，它要对所有的对象进行调查，当检验对象数量很大或对检验对象具有破坏性时，采用普查的方法是行不通的，要进行抽样调查。

(2)普查与抽样调查的适用条件是不同的，在具体问题中，用普查还是抽样调查的方式，要根据它们的特点和适用范围进行判断。

16. 下列调查中，适宜采用抽样调查的是（ ）

- A. 调查某市小学生每天的运动时间  
B. 某公司初步发现一位职员患有甲肝，对此公司职员进行检查  
C. 农业科技人员调查某块地今年麦穗的单穗平均质量  
D. 调查某快餐店中全部 8 位店员的生活质量情况

17. 下列抽查，适合抽样调查的是（ ）

- A. 进行某一项民意测验                      B. 调查某化工厂周围 5 个村庄是否受到污染  
C. 调查黄河的水质情况                      D. 调查某药品生产厂家一批药品的质量情况

18. 在以下调查中，适合用抽样调查的有（ ）

- A. 调查某品牌的冰箱的使用寿命                      B. 调查某个班级 10 名学生每周的体育锻炼时间  
C. 调查一批炮弹的杀伤半径                      D. 调查一个水库所有鱼中草鱼所占的比例

19. 下列调查中，调查方式选择合理的是（ ）

- A.了解某一品牌空调的使用寿命，选择普查  
B.了解神舟飞船的设备零件的质量情况，选择抽样调查  
C.了解一批袋装食品是否含有防腐剂，选择普查  
D.了解某公园全年的游客流量，选择抽样调查

20. 在以下调查中，适合用普查的是（ ）

- A. 调查一批小包装饼干的卫生是否达标

- B. 调查一批袋装牛奶的质量
- C. 调查一个班级的学生每天完成家庭作业所需要的时间
- D. 调查一批绳索的抗拉强度是否达到要求

21. 以下获取的数据不是通过查询获取的是（ ）

- A. 某领导想了解  $A$  市的大气环境质量，向当地有关部门咨询该市的  $PM_{2.5}$  的浓度
- B. 张三利用互联网了解到某市居民平均寿命达到 82.2 岁
- C. 某中学为了了解学生对课堂禁用手机的认同度，进行了问卷调查
- D. 从某公司员工年度报告中获知某种信息

22. 下列情况适合用全面调查的是（ ）

- A. 调查某化工厂周围 5 个村庄是否受到污染
- B. 调查某药品生产厂家一批药品的质量情况
- C. 进行某一项民意测验
- D. 调查黄河的水质情况

23. 下列调查中，调查方式选择合理的是（ ）

- A. 了解某市高一年级学生的身高情况，选择普查
- B. 了解长征运载火箭的设备零件质量情况，选择抽样调查
- C. 了解一批待售袋装牛奶的细菌数是否达标，选择普查
- D. 了解病人血液中血脂的含量，选择抽样调查

#### 题型四、总体与样本

##### 解题技巧提炼

解决此类问题要明确概念的实质，应注意两个问题

(1) 调查对象是什么。

(2) 样本是总体的一部分，因此样本中所含个体的数量不能超过总体中所含个体的数量，样本中个体的来源为总体中的个体。样本容量是样本中个体的数目，无单位。

24. 从某市高一年级考试的学生中随机抽查 2000 名学生的数学成绩进行统计分析，在这个问题中，下列说法正确的是（ ）

- A. 总体指的是该市高一年级考试的全体学生
- B. 样本是指 2000 名学生的数学成绩
- C. 样本容量指的是 2000 名学生
- D. 个体指的是指 2000 名学生中的每一名学生

25 为了了解参加运动会的 1000 名运动员的年龄情况，从中抽取了 10 名运动员的年龄进行统计分析. 下列说法中正确的有（ ）

- A. 1000 名运动员的年龄是总体
- B. 所抽取的 10 名运动员是一个样本
- C. 样本容量为 10
- D. 每个运动员被抽到的机会相等



26. 高考结束后，为了分析该校高三年级 1000 名学生的高考成绩，从中随机抽取了 100 名学生的成绩，就这个问题来说，下列说法中正确的是（ ）

- A. 100 名学生是个体                      B. 样本容量是 100  
C. 每名学生的成绩是所抽取的一个样本 D. 1000 名学生是样本

27. 某市市场监管局为了了解饮料的质量，从该市区某超市在售的 50 种饮料中抽取了 30 种饮料，对其质量进行了检查。在这个问题中，30 是（ ）

- A. 总体              B. 个体              C. 样本              D. 样本量

28. 为了解某校高中 3000 名学生的身高情况，从中抽取了 100 名学生进行调查，则这 100 名学生是（ ）

- A. 总体              B. 样本              C. 样本量              D. 个体

29. 为确保食品安全，某市质检部门检查 1000 袋方便面的质量，抽查总量的 2%。在这个问题中，下列说法正确的是（ ）

- A. 总体是指这 1000 袋方便面              B. 个体是 1 袋方便面  
C. 样本是按 2% 抽取的 20 袋方便面      D. 样本容量为 20

30. 一只口袋中装有很多黑色围棋子（不便倒出来数），为了估计口袋中黑色围棋子的个数，聪明的小红采用以下方法：在口袋中放入 10 枚（质地、大小相同，只有颜色不同）白色的围棋子，混合均匀后随机摸出 1 枚，记下颜色后放回口袋。不断重复上述过程，小红一共摸了 260 次，其中摸到白色棋子共 8 次，则估计口袋中黑色围棋子大约有（ ）

- A. 500 枚              B. 585 枚              C. 325 枚              D. 285 枚

31. 某中学高一生物课外兴趣小组要对本班同学的睡眠时间进行研究，得到了以下 10 个数据(单位：小时)：6.4，7.7，8.0，7.4，3.3，7.9，6.8，7.5，8.3，7.8，去掉数据\_\_\_\_\_能很好地提高样本数据的代表性.

## 6.2 抽样的基本方法

例 1. (1) 下面抽样方法是简单随机抽样的是 ( )

- A. 从平面直角坐标系中抽取 5 个点作为样本
- B. 可口可乐公司从仓库中的 1 000 箱可乐中一次性抽取 20 箱进行质量检查
- C. 某连队从 200 名战士中，挑选出 50 名最优秀的战士去参加抢险救灾活动
- D. 从 10 个手机中逐个不放回地随机抽取 2 个进行质量检验（假设 10 个手机已编号）

(2) 某校期末考试后，为了分析该校高一年级 1000 名学生的学习成绩，从中随机抽取了 100 名学生的成绩单，就这个问题来说，下面说法中正确的是 ( )

- A. 1000 名学生是总体
- B. 每名学生是个体
- C. 每名学生的成绩是所抽取的一个样本
- D. 样本的容量是 100

(3) 某工厂为了对 40 个零件进行抽样调查，将其编号为 00, 01, …, 38, 39. 现要从中选出 5 个，利用下面的随机数表，从第一行第 3 列开始，由左至右依次读取，选出来的第 5 个零件编号是 .

0647 4373 8636 9647 3661 4698 6371 6233 2616 8045 6011 1410  
9577 7424 6762 4281 1457 2042 5332 3732 2707 3607 5124 5179

【变式训练 1】. 下列四个抽样中，能运用简单随机抽样的是 ( )

- A. 从无数个个体中抽取 50 个个体作为样本
- B. 仓库中有 1 万支奥运火炬，从中一次性抽取 100 支火炬进行质量检查
- C. 某年级从 300 名学生中，挑选出 20 名最优秀的学生参加数学竞赛
- D. 从全班 50 名学生中，任意选取 5 名进行家访

【变式训练 2】. 为了了解全校 1740 名学生的身高情况，从中抽取 140 名学生进行测量，下列说法正确的是 ( )

- A. 总体是 1740
- B. 个体是每一个学生
- C. 样本是 140 名学生
- D. 样本容量是 140

【变式训练 3】. 现对一批产品进行抽样检测，其编号为 01, 02, 03, …, 49, 50, 利用随机数表（以下选取了随机数表中的第 1 行和第 2 行）选取 5 个个体，选取方法是从随机数表第 1 行的第 7 列开始由左向右读取，则选出来的第 3 个个体的编号为 .

78 16 65 72 08	02 63 14 07 02	43 69 69 38 74
32 04 94 23 49	55 80 20 36 35	48 69 97 28 01

考点 2 用样本平均数估计总体平均数

例 2. 电影《你好，李焕英》于 2021 年 2 月 12 日在中国内地上映，创造了连续多日的单日票房冠军. 某新闻机构想了解全国人民对《你好，李焕英》的评价，决定从某市 3 个区按人口数

用分层抽样的方法抽取一个样本. 若 3 个区人口数之比为 2: 3: 4, 且人口最少的一个区抽出 100 人, 则这个样本的容量等于 ( )

A. 400 B. 450 C. 500 D. 550

【变式训练】. 2020 年抗击新冠肺炎疫情期间, 为不影响学生的学习生活, 学校实行停课不停学. 为督促学生按时学习, 某校要求所有学生每天打卡, 全校学生的总人数为 1200 人. 某日随机抽查 200 人, 发现因各种原因未及时打卡的学生数为 12, 估计该日这个学校未及时打卡的学生数为 .

例 3. (1) 某校有男教师 150 人, 女教师 200 人, 为了了解该校教师的健康情况, 从中随机抽取男教师 15 人, 女教师 20 人, 进行调查, 这种抽样方法是 ( )

A. 简单随机抽样法 B. 抽签法  
C. 随机数表法 D. 分层抽样法

(2) 每年的 3 月 15 日是“国际消费者权益日”, 某地市场监管局在当天对某市场的 20 家肉制品店、100 家粮食加工品店和 15 家乳制品店进行抽检, 要用分层抽样的方法从中抽检 27 家, 则粮食加工品店需要被抽检 ( )

A. 20 家 B. 10 家 C. 15 家 D. 25 家

(3) 某小区人数约 30000 人, 创城期间, 需对小区居民进行分层抽样调查, 样本中有幼龄 120 人, 青壮龄 330 人, 老龄 150 人, 则该小区老龄人数的估计值为 ( )

A. 3300 B. 4500 C. 6000 D. 7500

(4) 按分层随机抽样的方法抽取 50 个样本. 第一层 22 个, 样本平均数为 16, 第 2 层 28 个, 样本平均数为 18, 由此可估计总体平均数为 .

【变式训练 1】. 为了解某地区的中小学生的视力情况, 拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查, 事先已了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异, 而男、女生视力情况差异不大. 在下面的抽样方法中, 最合理的抽样方法是 ( )

A. 简单随机抽样 B. 按性别分层随机抽样  
C. 按学段分层随机抽样 D. 其他抽样方法

【变式训练 2】. 电影《你好, 李焕英》于 2021 年 2 月 12 日在中国内地上映, 创造了连续多日的单日票房冠军. 某新闻机构想了解全国人民对《你好, 李焕英》的评价, 决定从某市 3 个区按人口数用分层抽样的方法抽取一个样本. 若 3 个区人口数之比为 2: 3: 4, 且人口最少的一个区抽出 100 人, 则这个样本的容量等于 ( )

A. 400 B. 450 C. 500 D. 550

【变式训练 3】. “互联网+”时代全民阅读的内涵已多元化, 在线读书成为一种生活方式. 某高校为了解本校学生阅读情况, 拟采用分层抽样方法从该校四个年级中抽取一个容量为 360 的样本进行调查, 大一与大二学生占全校一半, 大三学生与大四学生之比为 3: 2, 则大四学生应抽取的学生为 ( )

A. 72 B. 100 C. 108 D. 120

【变式训练 4】. 某校 2019 级高一新生 500 人，男生有 230 名，女生有 270 名，按男女生比例进行分层随机抽样，样本容量为 50. 进行身高测量（单位：cm），男生样本 23 人的身高平均数为 170.6cm，女生样本 27 人的身高平均数为 160.6cm. 则可估计我校高一年级新生的平均身高在 \_\_\_\_\_ cm 左右.

1. 为抽查汽车排放尾气的合格率，某环保局在一路口随机抽查，这种抽查是（ ）

- A. 简单随机抽样 B. 抽签法  
C. 随机数表法 D. 以上都不对

已知下列抽取样本的方式：

- ①从无限多个个体中抽取 100 个个体作为样本；  
②盒子里共有 80 个零件，从中选出 5 个零件进行质量检验，在抽样操作时，从中任意拿出 1 个零件进行质量检验后再把它放回盒子里；  
③从 20 件玩具中一次性抽取 3 件进行质量检验；  
④某班有 56 名同学，指定个子最高的 5 名同学参加学校组织的篮球赛.

其中，不是简单随机抽样的个数是（ ）

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

对于简单随机抽样，下列说法中正确的命题为（ ）

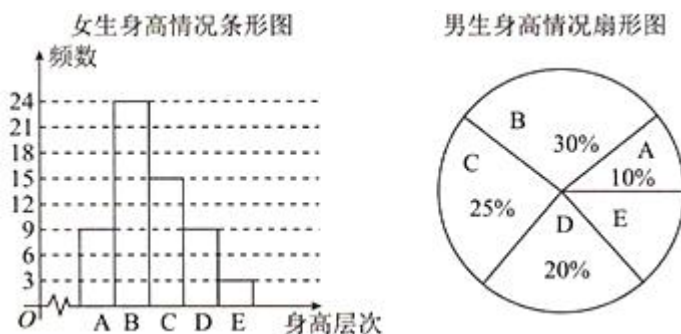
- ①它要求被抽取样本的总体的个数有限，以便对其中各个个体被抽取的概率进行分析；  
②它是从总体中逐个地进行抽取，以便在抽样实践中进行操作；  
③它是一种等可能抽样，不仅每次从总体中抽取一个个体时，各个个体被抽取的可能性相等，而且在整个抽样过程中，各个个体被抽取的可能性也相等，从而保证了这种方法抽样的公平性.

- A. ①②③ B. ①② C. ①③ D. ②③

下列抽样试验中，适合采用抽签法的是（ ）

- A. 从某厂生产的 2000 件产品中抽取 500 件进行质量检验  
B. 从某厂生产的 2000 件产品中抽取 10 件进行质量检验  
C. 从某厂生产的五箱（每箱 10 件）产品中抽取 10 件进行质量检验  
D. 从甲、乙两厂生产的两箱（每箱 10 件）产品中抽取 6 件进行质量检验

某市教体局对全市高三年级的学生身高进行抽样调查，随机抽取了 100 名学生，他们的身高都处在 A, B, C, D, E 五个层次内，根据抽样结果得到统计图表，则样本中 B 层人数是（ ）



A. 12 B. 24 C. 32 D. 36

6. 某高校有青年教师 600 人、中年教师 780 人、老年教师  $n$  人，学校为了了解教师的身体健康状况，采用分层抽样的方法进行抽样调查，抽取 35 人进行调查. 已知中年教师被抽取的人数为 13，则  $n =$  ( )

A. 800 B. 780 C. 720 D. 660

7. 某校为了了解学生学习的情况，采用分层抽样的方法从高一 2400 人、高二 2000 人、高三  $n$  人中，抽取 180 人进行问卷调查. 已知高一被抽取的人数为 72 人，那么高三被抽取的人数为 ( )

A. 48 B. 60 C. 72 D. 84

用样本估计总体的统计思想在我国古代数学名著《数书九章》中就有记载，其中有道“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来一批米，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 250 粒内夹谷 25 粒，若这批米内夹谷有 160 石，则这一批米约有 石.

9. 某校高一、高二、高三共有 200 名学生，为调查他们的体育锻炼情况，通过分层抽样获得了 20 名学生一周的锻炼时间，数据如表（单位：小时）：

高一	6	6.5	7	7.5	8			
高二	6	7	8	9	10	11	12	
高三	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12	13.5

则根据上述样本数据估计该校学生一周的锻炼时间不小于 7 小时的人数为 .

10 某地准备修建一条新的地铁线路，为了调查市民对沿线地铁站配置方案的满意度，现对居民按年龄（单位：岁）进行问卷调查，从某小区年龄在 $[18, 68]$ 内的居民中随机抽取 100 人，将获得的数据按照年龄区间 $[18, 28)$ ， $[28, 38)$ ， $[38, 48)$ ， $[48, 58)$ ， $[58, 68]$ 分成 5 组，同时对这 100 人的意见情况进行统计得到频率分布表. 经统计，在这 100 人中，共有 65 人赞同目前的地铁站配置方案.

分组	持赞同意见的人数	占本组的比例
$[18, 28)$	20	0.8
$[28, 38)$	$a$	$b$
$[38, 48)$	8	0.8
$[48, 58)$	12	0.6
$[58, 68]$	15	0.6

(1) 求  $a$  和  $b$  的值；

(2) 在这 100 人中，按分层抽样的方法从年龄在区间 $[28, 38)$ ， $[38, 48)$ 内的居民（包括持反对意见者）中随机抽取 18 人进一步征询意见，求年龄在 $[28, 38)$ ， $[38, 48)$ 内的居民各抽取多少人？

## §6.3 用样本估计总体分布

### 3.1 从频数到频率

### 3.2 频率分布直方图

#### 【学习目标】

- 1.了解频数与频率的关系.
- 2.掌握频率分布直方图的画法.
- 3.会用频率分布直方图或频率折线图估计总体分布.
- 4.会利用频率分布直方图或频率折线图解决实际问题.

#### ◆ 知识点一 频数与频率

- 1.频数:在统计学中,将样本按照一定的方法分成若干组,每个组内含有这个样本的个体的\_\_\_\_\_叫作频数.
- 2.频率:某个组的频数与总数的比值叫作这个组的频率,即 $\frac{\text{频数}}{\text{总数}} = \text{频率}$ .

#### 【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)总数不变的情况下,某个组的频数越大,则该组的频率也越大. ( )
- (2)每个组的频数之比与频率之比是一样的. ( )

#### ◆ 知识点二 频率分布直方图

##### 1.概念

图中每个小矩形的底边长是该组的\_\_\_\_\_,每个小矩形的高是该组的频率与组距的比,从而每个小矩形的面积等于该组的\_\_\_\_\_,即每个小矩形的面积 $= \text{组距} \times \frac{\text{频率}}{\text{组距}} = \text{频率}$ .我们把这样的图叫作频率分布直方图.频率分布直方图以面积的形式反映了数据落在各个小组的频率的大小.

##### 2.绘制频率分布直方图的步骤

###### (1)计算极差

极差即一组数据中\_\_\_\_\_的差.

###### (2)确定组距与组数

①组距与组数的确定没有固定的标准,常常需要一个尝试与选择的过程.

②组距和样本容量有关,一般样本容量越大,分的组也越多,当样本容量不超过 120 时,按照数据的多少,常分为 5 组~12 组.

③极差、组距、组数之间有如下关系：

设  $k = \frac{\text{极差}}{\text{组距}}$ , 若  $k \in \mathbb{Z}$ , 则组数为  $k$ ; 若  $k \notin \mathbb{Z}$ , 则组数为大于  $k$  的最小整数.

(3) 将数据分组

按组距将数据分组, 分组时, 各组一般均为左闭右开区间, 最后一组全是闭区间.

(4) 列频率分布表

(5) 画频率分布直方图

画图时, 应以横轴表示分组, 纵轴表示各组频率与组距的比值, 其相应组距上的频率应该等于  $\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$ .

### ◆ 知识点三 频率折线图

在频率分布直方图中, 按照分组原则, 再在左边和右边各加一个区间, 从所加的左边区间的  $\frac{\text{组距}}{2}$  开始, 用线段依次连接各个矩形的  $\frac{\text{组距}}{2}$ , 直至右边所加区间的中点, 就可以得到一条折线, 称之为频率折线图.

【诊断分析】 样本容量越大, 频率折线图就会越来越接近于一条光滑曲线吗?

### ◆ 探究点一 频数与频率

例 1 (1) 某班学生在一次数学考试中各分数段以及人数为:  $[0, 80)$ , 2 人;  $[80, 90)$ , 6 人;  $[90, 100)$ , 4 人;  $[100, 110)$ , 10 人;  $[110, 120)$ , 12 人;  $[120, 130)$ , 5 人;  $[130, 140)$ , 4 人;  $[140, 150]$ , 2 人. 那么分数在  $[100, 130)$  内的频数以及频率分别为 ( )

A. 27, 0.56      B. 20, 0.56      C. 27, 0.6      D. 13, 0.29

(2) 某高校进行自主招生, 先从报名者中筛选出 400 人参加笔试, 再按笔试成绩择优选出 100 人参加面试. 现随机抽取了 24 名笔试者的成绩, 统计结果如下表所示:

分数段	$[60, 65)$	$[65, 70)$	$[70, 75)$	$[75, 80)$	$[80, 85)$	$[85, 90]$
人数	2	3	4	9	5	1

据此估计允许参加面试的分数线是 ( )

A. 90    B. 85    C. 80    D. 75

(3) 一个容量为  $n$  的样本, 将其观测数据分成若干组, 已知甲组的频数和频率分别为 36 和  $\frac{1}{4}$ , 则  $n = \underline{\hspace{2cm}}$ , 频率为  $\frac{1}{6}$  的乙组的频数  $x = \underline{\hspace{2cm}}$ .

[素养小结]

要解决频数与频率的问题,首先要明确几个关系,即各组的频数之和等于样本容量,各组的频率之和为 1,频率=

$$\frac{\text{频数}}{\text{样本容量}},$$

### ◆ 探究点二 画频率分布直方图和频率折线图

例 2 已知一组样本数据:30,29,26,24,25,27,26,22,24,25,26,28,25,21,23,25,27,29,25,28.

按[20.5,22.5),[22.5,24.5),[24.5,26.5),[26.5,28.5),[28.5,30.5]分成 5 组.

(1)列出样本的频率分布表;

(2)画出频率分布直方图和频率折线图;

(3)根据频率分布直方图,估计总体中的数据出现在[23,28]内的频率.

[素养小结]

绘制频率分布直方图的关键点

(1)在画频率分布直方图时,横轴表示随机变量的取值,纵轴表示 $\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$ ,这样每一组的频率都可

以用该组的组距为底, $\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$ 为高的小矩形的面积来表示,其中,矩形的高= $\frac{\text{频率}}{\text{组距}}=\frac{1}{\text{组距} \times \text{样本容量}} \times$

频数;

(2)同一组数据,如果组距不同,得到的频率分布直方图也会不同.

### ◆ 探究点三 频率分布直方图的应用

[提问] 在频率分布直方图中,各小矩形的高度之比、面积之比都等于对应频率之比吗?

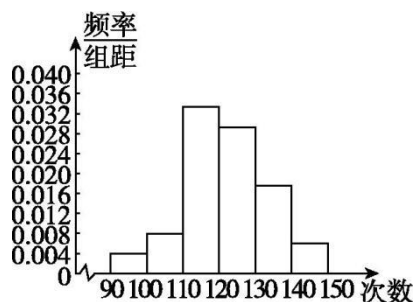
例 3 为了了解高一年级学生的体能情况,某校抽取部分学生进行一分钟跳绳次数测试.将所得数据整理后,画出频率分布直方图(如图所示),图中从左到右各小长方形的面积之比为 2 : 4 : 17 : 15 : 9 : 3,第二小组的频数为 12.

(1)第二小组的频率是多少?样本容量是多少?

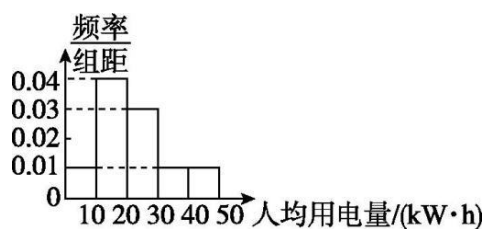
(2)若次数在 110 以上(含 110 次)为体能达标,则估计该校全体高一年级学生的体能达标率是多少?

(3)样本中体能不达标的人数是多少?





变式 (多选题)[2023 •江西铜鼓中学高一月考] 供电部门对某社区 1000 户居民 12 月份人均用电情况进行统计后,按人均用电量(单位: $\text{kW} \cdot \text{h}$ )分为  $[0,10)$ ,  $[10,20)$ ,  $[20,30)$ ,  $[30,40)$ ,  $[40,50]$  五组,整理得到如图所示的频率分布直方图,则有关这 1000 户居民,下列说法正确的是 ( )



- A. 12 月份人均用电量在  $[10,20)$  内的户数最多,有 400 户
- B. 12 月份人均用电量在  $[20,30)$  内的有 300 户
- C. 12 月份人均用电量不低于  $20 \text{ kW} \cdot \text{h}$  的有 500 户
- D. 在这 1000 户居民中任选 1 户做进一步调查,选到的居民的人均用电量在  $[30,40)$  内的概率为  $\frac{1}{20}$

[素养小结]

频率分布直方图的性质:

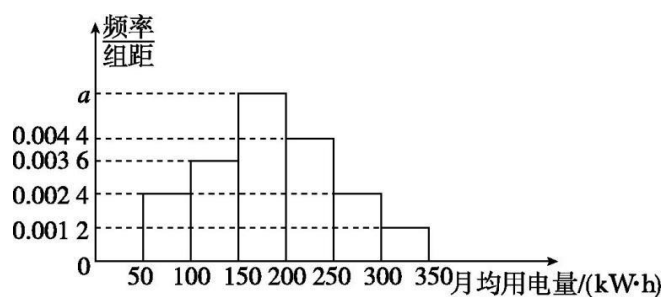
(1) 因为小矩形的面积 = 组距  $\times \frac{\text{频率}}{\text{组距}} = \text{频率}$ , 所以各小矩形的面积表示相应各组的频率, 这样, 频率分布直方图就以面积的形式反映了数据落在各个小组内的频率大小.

(2) 在频率分布直方图中, 各小矩形的面积之和等于 1.

(3)  $\frac{\text{频数}}{\text{相应的频率}} = \text{样本容量}$ .

拓展 为了解某市家庭用电量的情况,该市统计局调查了 100 户居民去年一年的月均用电量(单位: $\text{kW} \cdot \text{h}$ ),发现他们的月均用电量都在 $[50,350]$ 内,按 $[50,100),[100,150),[150,200),[200,250),[250,300),[300,350]$ 分组后,画出频率分布直方图如图所示.

- (1)求  $a$  的值;
- (2)求在被调查的用户中,月均用电量不少于  $250 \text{ kW} \cdot \text{h}$  的户数;
- (3)为了既满足居民的基本用电需求,又提高能源的利用效率,市政府计划采用阶梯定价,希望使 80%的居民缴费在第一档(费用最低),请给出第一档用电标准(单位: $\text{kW} \cdot \text{h}$ )的建议,并简要说明理由.(结果保留一位小数)。



## §4 用样本估计总体的数字特征

### 4.1 样本的数字特征

#### 一、学习目标

- 1.会求样本的众数、中位数、平均数、极差、方差和标准差.
- 2.理解样本的数字特征的意义和作用,会用样本的数字特征估计总体的数字特征,作出合理解释和决策.

#### 二、重点、难点

理解样本的数字特征的意义和作用,会用样本的数字特征估计总体的数字特征,作出合理解释和决策.

#### 三、导学流程

##### ◆ 探究点一 数字特征的计算

例 1 (1)(多选题)甲、乙两名球员练习罚球,每人练习 10 组,每组罚球 20 个,命中个数如下所示:

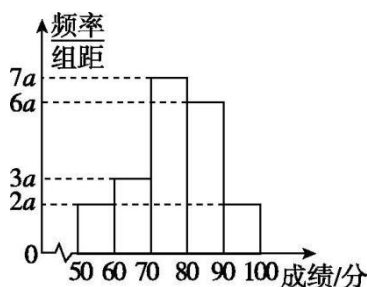
甲:20,19,17,18,18,16,17,15,20,20

乙:18,19,13,18,19,20,20,20,17,16

则下列结论正确的是( )

- A.甲数据的极差比乙数据的极差小
- B.甲数据的中位数与乙数据的中位数相等
- C.甲数据的平均数与乙数据的平均数相等
- D.甲数据的方差是 2.8

(2)(多选题)某学校有 1000 名学生,为更好地了解学生的身体健康情况,随机抽取了 100 名学生进行测试,将测试成绩分成 $[50,60)$ , $[60,70)$ , $\cdots$ , $[90,100]$ 五组,测试成绩(单位:分)的频率分布直方图如图所示,则下列说法正确的有 ( )



- A.频率分布直方图中  $a$  的值为 0.005
- B.估计这 100 名学生测试成绩的中位数约为 77
- C.估计这 100 名学生测试成绩的众数为 80
- D.估计该校全部学生测试成绩落在 $[60,70)$ 内的人数为 160

(3)五个数 1,2,3,4, $a$  的平均数是 3,则这五个数的标准差是\_\_\_\_\_.

[素养小结]

样本的众数、中位数和平均数常用来表示样本数据的“中心值”,其中众数和中位数容易计算,且不受少数几个极端值的影响,但只能表达样本数据中的少量信息.平均数表达了数据更多的信息,但受样本中每个数据的影响,越极端的数据对平均数的影响越大,当一组数据中个别数据较大时,可用中位数描述其集中趋势.

◆ 探究点二 数字特征的应用

例 2 个体户张某经营一家餐饮店,下面是该餐饮店所有工作人员某月的工资表.

工作人员	工资
老板张某	30 000 元
大厨老张	4500 元
二厨小马	3500 元
采购员小王	4000 元
杂工李阿姨	3200 元
服务生小明	3200 元
会计小何	4100 元

- (1)计算所有工作人员该月的平均工资.
- (2)由(1)计算出的平均工资能否反映该餐饮店打工人员这个月收入的一般水平?为什么?
- (3)去掉老板张某的工资后,再计算平均工资,这能代表该餐饮店打工人员当月收入的一般水平吗?
- (4)根据以上计算,结合统计的观点,你对(3)的结果有什么看法?

变式 甲、乙两台机床同时加工直径为 100 cm 的零件,为了检验质量,各从中抽取 6 件测量其直径(单位:cm),所得数据分别记录如下:

甲:99 100 98 100 100 103

乙:99 100 102 99 100 100

- (1)分别计算两组数据的平均数及标准差;  
(2)根据计算结果判断哪台机床加工的零件质量更稳定.

[素养小结]

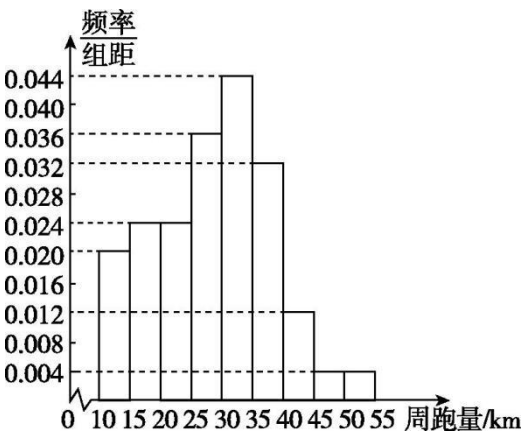
- (1)平均数、中位数与众数都是描述一组数据集中趋势的量,平均数是最重要的量.但当一组数据中有不少数据多次重复出现时,其众数往往更能反映这组数据的集中趋势.  
(2)方差、标准差描述了数据相对平均数的离散程度.标准差越大,数据越分散,稳定性就越差;标准差越小,数据越集中,稳定性就越好.

拓展 某科研课题组通过一款手机 APP 软件,调查了某市 2000 名跑步爱好者平均每周的跑步量(简称“周跑量”),得到频率分布直方图如图.

- (1)估计样本的中位数(保留一位小数);  
(2)根据跑步爱好者的周跑量,将跑步爱好者分成三类,不同类别的跑步爱好者的周跑量及购买的装备的价格如下表:

周跑量	小于 20 km	不小于 20 km 且小于 40 km	不小于 40 km
类别	休闲跑者	核心跑者	精英跑者
装备价格(单位:元)	2500	4000	4500

根据以上数据,估计该市每名跑步爱好者购买装备平均需要花费多少元?



## 6.4.2-6.4.3 分层随机抽样的均值与方差和百分位数

### 一、学习目标

1. 学会求样本的众数，中位数，平均数，极差，方差，标准差
2. 能用样本的数字特征估计总体的数字特征，并做出合理的决策
3. 百分位数的求法，频率分布直方图求平均数，中位数，众数

### 二、重点、难点

分层抽样的平均数与方差的求法

### 三、导学流程

#### 题型一、计算几个数的平均数

##### 解题技巧提炼

求与对数函数有关的函数的定义域时应遵循的原则

若一组数据为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 则这组数据的平均数、方差可用求和符号表示为  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ .

1. (23-24 高一下·新疆·期末) 已知在高考前最后一次模拟考试中, 高三某班 8 名同学的物理成绩分别为 84, 79, 84, 86, 95, 84, 87, 93, 则该组数据的平均数和众数分别是 ( )

A. 86, 84      B. 84.5, 85      C. 85, 84      D. 86.5, 84

2. (23-24 高一下·黑龙江大庆·期末) 一个同学投掷 10 次骰子, 记录出现的点数, 根据统计结果, 在下列情况中一定不能出现点数 6 的是 ( )

A. 平均数为 3, 中位数为 4  
B. 中位数为 4, 众数为 3  
C. 平均数为 2, 方差为 2.1  
D. 中位数为 3, 方差为 0.85

3. (23-24 高一下·山西大同·期末) 若数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的平均数为  $a$ , 数据  $y_1 = 2 + x_1, y_2 = 2 + x_2, \dots, y_n = 2 + x_n$ , 则数据  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的平均数为 ( )

A.  $a$       B.  $2+a$       C. 2      D.  $2a$

4. (23-24 高一下·安徽马鞍山·期末) 某校篮球社的 20 个成员进行了定点投篮测试并记录得分, 已知男生组 10 人得分的平均数和方差分别为 8 和 4, 女生组 10 人得分的平均数和方差分别为  $x$  和  $y$ , 这 20 人得分的平均数和方差分别为  $a$  和  $b$ , 则 ( )

A.  $x=8$  时,  $a=8$

B.  $y=4$  时,  $b=4$

C.  $x=8$ ,  $y=4$  时,  $b=4$

D.  $x=4$ ,  $y=8$  时,  $b=10$

5. (23-24 高一下·安徽六安·期末) 关于样本数据: 4,4,5,7,7,7,8,9,9,10, 下列结论中正确的是 ( )

A. 极差为 6

B. 众数为 7

C. 中位数为 8

D. 平均数为 8

6. (23-24 高一下·西藏日喀则·期末) 一组样本数据为  $1, a, 4, 5, b, 8$ , 若  $a, b$  是方程  $x^2 - 6x + 8 = 0$  的两根, 则这个样本的方差是\_\_\_\_\_.

7. (23-24 高一下·陕西商洛·期末) 有一组样本数据为 1, 3, 5, 7, 则它的方差为\_\_\_\_\_.

8. (23-24 高一下·广东广州·期末) 已知总体划分为 2 层, 通过分层随机抽样, 第  $i$  层抽取的样本量、样本均值和样本方差分别为  $n_i, \bar{x}_i, s_i^2, i=1, 2$ . 记总样本数据的均值为  $\bar{x}$ , 总样本数据的方差为  $s^2$ .

(1) 写出  $\bar{x}$  与  $s^2$  的计算公式 (直接写出结果, 不需证明);

(2) 某学校有高中学生 500 人, 其中男生 300 人, 女生 200 人. 现采用分层随机抽样的方法抽取样本, 并观测样本的指标值 (单位: cm), 计算得男生样本的均值为 172.5, 方差为 16, 女生样本的均值为 162.5, 方差为 30.

(i) 如果已知男、女样本量按比例分配, 试计算出总样本的均值与方差;

(ii) 如果已知男、女的样本量都是 50, 试计算出总样本的均值与方差, 此时将它们分别作为总体的均值与方差的估计合适吗? 请说明理由.

## 题型二、计算几个数据的极差方差、标准差

### 解题技巧提炼

(1) 确定各层的平均数  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ , 方差  $s_1^2, s_2^2, \dots, s_n^2$ , 权重  $w_1, w_2, \dots, w_n$ ;

(2) 计算平均数  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n w_i \bar{x}_i$ ;

(3)  $s^2 = \sum_{i=1}^n w_i [s_i^2 + (\bar{x}_i - \bar{x})^2]$ .

9. (23-24 高一下·江苏常州·期末) 已知某班级参与定点投篮比赛的学生共有 20 名, 进球数的平均值和方差分别是 4 和 3.6, 其中男生进球数的平均值和方差分别是 5 和 1.8, 女生进球数的平均值为 3, 则女生进球数的方差为 ( )

A. 3.2

B. 3.4

C. 3.6

D. 3.8



10. (23-24 高一下·重庆·期末) 某人投掷骰子 5 次, 由于记录遗失, 只有数据平均数为 3 和方差不超过 1, 则这 5 次点数中 ( )

- A. 众数可为 3    B. 中位数可为 2    C. 极差可为 1    D. 最大点数可为 5

11. (23-24 高一下·湖南长沙·期末) 某校举行演讲比赛, 10 位评委对某选手评分数据如下:

7.5, 7.5, 7.8, 7.8, 8.0, 8.0, 8.2, 8.3, 8.4, 9.9 若去掉一个最高分和一个最低分, 则新数据与原数据相比, 一定不变的数字特征是 ( )

- A. 平均数    B. 中位数    C. 方差    D. 极差

12. (23-24 高一下·福建福州·期末) 四名同学各掷骰子 5 次, 分别记录每次骰子出现的点数, 根据四名同学的统计结果, 可以判断出一定没有出现点数 6 的是 ( )

- A. 平均数为 3, 中位数为 2    B. 平均数为 3, 方差为 2  
C. 中位数为 3, 众数为 2    D. 中位数为 3, 方差为 1.6

13. (23-24 高一下·浙江杭州·期末) 在对树人中学高一年级学生身高的调查中, 采用样本比例分配的分层随机抽样, 如果不知道样本数据, 只知道抽取了男生 20 人, 其平均数和方差分别为 170 和 10, 抽取了女生 30 人, 其平均数和方差分别为 160 和 15. 则估计出总样本的方差为\_\_\_\_\_.

14. (23-24 高一下·江苏常州·期末) 设  $x, y, z$  都是正整数, 且  $x \in [5, 10], y \in [11, 20], z \in [21, 25]$ , 当  $x, y, z$  的取值依次为\_\_\_\_\_时,  $x, y, z$  这三个数的方差最小. (若存在多组取值符合条件, 只需写出其中一组取值)

15. (23-24 高一下·安徽六安·期末) 若一组数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的方差为 1, 则数据  $2x_1 + 4, 2x_2 + 4, \dots, 2x_n + 4$  的标准差为\_\_\_\_\_.

16. (23-24 高一下·宁夏固原·期末) 统计学作为数学的一个重要分支, 其犹如一座坚实的大厦, 构建于严谨的数学基石之上, 为理解和诠释数据提供了强大的支撑, 请用你所学到的统计知识解答以下问题:

(1) 如果将总体分为  $k$  层, 第  $j$  层抽取的样本为  $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn_j}$ , 第  $j$  层的样本量为  $n_j$ , 样本平均数为  $\bar{x}_j$ ,

样本方差为  $s_j^2$ ,  $j=1, 2, \dots, k$ . 记  $\sum_{j=1}^k n_j = n$ , 总的样本平均数为  $\bar{x}$ , 样本方差为  $s^2$ , 证明:

$$s^2 = \frac{1}{n} \left\{ n_1 \left[ s_1^2 + (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 \right] + n_2 \left[ s_2^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x})^2 \right] + \dots + n_k \left[ s_k^2 + (\bar{x}_k - \bar{x})^2 \right] \right\}, \text{ 即 } s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \left\{ n_j \left[ s_j^2 + (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \right] \right\}.$$

(2) 为研究男女学生在生活费支出 (单位: 元) 上的差异, 某校在高一年级 400 名学生中随机抽取 40 人, 统计他们某一周的生活费支出, 得到下面的结果:

抽取的学生	生活费支出的平均数	生活费支出的标准差
-------	-----------	-----------

男生 22 人	380	$\sqrt{250}$
女生 18 人	360	$\sqrt{280}$

根据以上数据及（1）结论，估计该校高一学生这周生活费支出的总体平均数  $\bar{X}$ 、总体方差  $S^2$ 。

### 题型三、总体百分位数的估计

#### 解题技巧提炼

求百分位数时的注意点

- (1)务必要先将数据按照从小到大的顺序排列;
- (2)依  $i=np$  的结果是不是整数确定  $p$  分位数对应的项.

17. (23-24 高一下·江苏无锡·期末) 已知一组数据  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  满足  $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ ，则下列说法正确的是（ ）

- A. 这组数据的 40%分位数是  $x_2$
- B.  $x_2, x_3, x_4$  的平均数小于  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  的平均数
- C.  $x_2, x_3, x_4$  的方差大于  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  的方差
- D.  $x_2, x_3, x_4$  的极差小于  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  的极差

18. (22-23 高一下·山东临沂·期末) 某校在运动会期间组织了 20 名啦啦队队员，她们的身高（单位：cm）数据按从小到大排序如下：

162 162 163 165 165 165 165 167 167 167

168 168 170 170 171 173 175 175 178 178

则这 20 名队员身高的第 75 百分位数为（ ）

- A. 171
- B. 172
- C. 173
- D. 174

19. (22-23 高一下·天津南开·期末) 一组数据：16, 21, 23, 26, 33, 33, 37, 37 的第 85 百分位数为（ ）

- A. 34
- B. 35
- C. 36
- D. 37

20. (23-24 高一下·内蒙古·期末) 已知甲组数据为 4, 3, 2, 乙组数据为 6, 7, 8, 将甲、乙两组数据混合后得到丙组数据，则（ ）

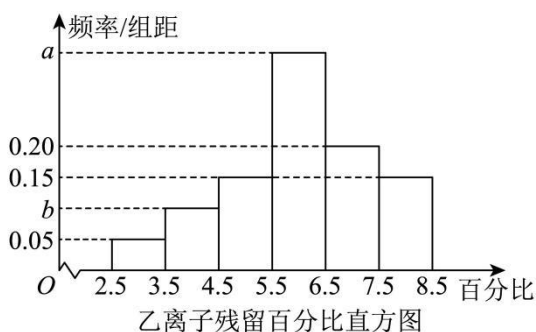
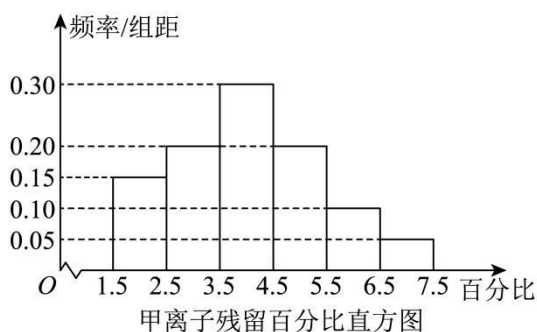
- A. 丙组数据的中位数为 5

- B. 甲组数据的 70%分位数是 2
- C. 甲组数据的方差等于乙组数据的方差
- D. 甲组数据的极差等于乙组数据的极差

21. (22-23 高一下·甘肃·期末) 2023 年 6 月 4 日神舟十五号载人飞行任务取得圆满成功, 费俊龙、邓清明、张陆这三位航天员在空间站上工作了 186 天, 此次神舟十五号载人飞船返回, 是我国空间站转入应用与发展阶段后的首次返回任务, 掀开了中国航天空间站的历史新篇章. 为科普航天知识, 某校组织学生参与航天知识竞答活动, 某班 8 位同学成绩如下: 7, 6, 8, 9, 8, 7, 10,  $m$ , 若去掉  $m$ , 该组数据的第 25 百分位数保持不变, 则整数  $m(1 \leq m \leq 10)$  的值可以是\_\_\_\_\_ (写出一个满足条件的  $m$  值即可).

22. (23-24 高一下·江苏南京·期末) 数据 4, 1, 6, 2, 9, 5, 8 的 60 百分位数为\_\_\_\_\_.

23. (23-24 高一下·浙江杭州·期末) 为了解甲、乙两种离子在小鼠体内的残留程度, 进行如下试验: 将 200 只小鼠随机分成 A, B 两组, 每组 100 只, 其中 A 组小鼠给服甲离子溶液, B 组小鼠给服乙离子溶液. 每只小鼠给服的溶液体积相同、摩尔浓度相同. 经过一段时间后用某种科学方法测算出残留在小鼠体内离子的百分比. 根据试验数据分别得到如下直方图:



记  $C$  为事件: “乙离子残留在体内的百分比不高于 5.5”, 根据直方图得到  $P(C)$  的估计值为 0.30.

- 求乙离子残留百分比直方图中  $a, b$  的值;
- 求甲离子残留百分比的第 75 百分位数;
- 估计乙离子残留百分比的均值. (同一组数据用该组区间的中点值为代表)

24. (22-23 高一下·甘肃白银·期末) 某选手在参加某次比赛中, 各评委打出的分数为 10, 9, 8, 9, 9, 8, 10, 7, 8, 6.

- 求该选手所有得分的平均数;
- 若该选手所有得分的  $m\%$  分位数为 9, 求整数  $m$  的取值集合.

## 7.1 随机现象与随机事件

### 一、学习目标

- 1、理解样本点与有限样本空间的含义
- 2、理解随机事件与样本点的关系
- 3、了解随机事件的交、并与互斥的含义
- 4、结合实例进行随机事件的交、并运算

### 二、重点、难点

随机事件的交、并运算。

### 三、导学流程

#### 考查题型一 判断现象是随机现象还是确定性现象

（多选题）1. 下列现象中，是随机现象的有（ ）

- A. 在一条公路上，交警记录某一小时通过的汽车超过 300 辆
- B. 若  $a$  为整数，则  $a+1$  为整数
- C. 发射一颗炮弹，命中目标
- D. 检查流水线上的一件产品是合格品还是次品

2. 在下列现象中，随机现象是\_\_\_\_\_.（选填序号）

- ①汽车排放尾气会污染环境；
- ②实数  $a$ 、 $b$  都不为 0，则  $a^2 + b^2 = 0$ ；
- ③任取一个正方体的 4 个顶点，这 4 个顶点不共面；
- ④将一枚硬币连掷三次，结果出现三次正面；
- ⑤函数  $y = \log_a x$  ( $0 < a < 1$ ) 在定义域内为严格增函数；
- ⑥三个小球全部放入两个盒子中，其中一个盒子里有三个球.

#### 考查题型二 判断事件是随机事件还是确定性事件还是不可能事件

1. 在 12 件同类产品中，有 10 件正品和 2 件次品，从中任意抽出 3 件. 其中为必然事件的是（ ）.

- A. 3 件都是正品    B. 至少有 1 件是次品    C. 3 件都是次品    D. 至少有 1 件是正品

2. 给出下列事件：

- ①函数  $y = \log_a x$  ( $0 < a < 1$ ) 在定义域内为增函数；
- ②小学生和张怡宁打乒乓球，张怡宁胜利；
- ③一所学校共有 998 名学生，有 3 名学生的生日相同；

④若集合  $A$ 、 $B$ 、 $C$  满足  $A \subseteq B$ ， $B \subseteq C$ ，则  $A \subseteq C$ ；

⑤在标准大气压下，河流在  $20^{\circ}\text{C}$  时结冰；

⑥从 1、3、9 中任选两数相加，其和为偶数.

其中属于随机事件的是\_\_\_\_\_，属于必然事件的是\_\_\_\_\_，属于不可能事件的是\_\_\_\_\_（填序号）.

### 考查题型三 判断随机事件样本点的个数

1. 抛掷两枚硬币，观察它们落地时朝上的面的情况，该试验的样本空间中样本点的个数为（ ）

- A. 1                      B. 2                      C. 4                      D. 8

2. 先后抛掷 2 枚质地均匀的一角、五角的硬币，观察落地后硬币的正反面情况，则下列事件中包含 3 个样本点的是（ ）

- A. “至少一枚硬币正面向上”                      B. “只有一枚硬币正面向上”  
C. “两枚硬币都是正面向上”                      D. “两枚硬币中一枚正面向上，另一枚反面向上”

3. 从  $a, b, c, d$  中任取两个字母，则该试验的样本点数为\_\_\_\_\_.

### 考查题型四 求随机事件的样本空间

1. 一个家庭有两个小孩，则样本空间为（ ）

- A.  $\{(\text{男}, \text{女}), (\text{男}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}$                       B.  $\{(\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男})\}$   
C.  $\{(\text{男}, \text{男}), (\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}$                       D.  $\{(\text{男}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}$

2. 从两名男生（记为  $B_1$  和  $B_2$ ）和两名女生（记为  $G_1$  和  $G_2$ ）这四人中依次选取两名学生.

(1)请写出有放回简单随机抽样的样本空间；

(2)请写出不放回简单随机抽样的样本空间.

3. 做投掷 2 枚均匀骰子的试验，用  $(x, y)$  表示结果，其中  $x$  表示第一枚骰子出现的点数， $y$  表示第 2 枚骰子出现的点数. 写出：

(1)试验的样本空间  $\Omega$ ；

(2)事件“出现点数之和大于 8”包含的样本点；

(3)事件“出现点数相等”包含的样本点；

(4)事件“出现点数之和等于 7”包含的样本点.

### 考查题型五 指出随机事件的含义

1. 依次投掷两枚骰子，所得点数之和记为  $X$ ，那么  $X = 4$  表示的随机试验的样本点是（ ）

- A. 第一枚是 3 点，第二枚是 1 点  
B. 第一枚是 3 点，第二枚是 1 点或第一枚是 1 点，第二枚是 3 点或两枚都是 2 点

C. 两枚都是 4 点

D. 两枚都是 2 点

2. 做抛掷红、蓝两枚骰子的试验，用  $(x, y)$  表示结果，其中  $x$  表示红色骰子出现的点数， $y$  表示蓝色骰子出现的点数. 写出：

(1) 这个试验的样本空间；

(2) 这个试验的结果的个数；

(3) 指出事件  $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$  的含义.

### 考查题型六 确定所给事件的包含关系

1. 抛掷一颗质地均匀的骰子，有如下随机事件： $C_1 =$ “点数不大于 3”， $C_2 =$ “点数大于 3”， $C_3 =$ “点数大于 5”； $D =$ “点数为奇数”； $E_i =$ “点数为  $i$ ”，其中  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . 下列结论正确的是（ ）

A.  $C_1 \subseteq D$       B.  $D = E_1 \cup E_3 \cup E_5$       C.  $C_2$  与  $C_3$  互斥      D.  $E_1$  与  $E_2$  互为对立

2. 某饮料厂商开发了一种新的饮料，为了促销，每箱装的 6 瓶饮料中有 2 瓶瓶盖上分别印有“一等奖”，“二等奖”，其余 4 瓶印有“谢谢惠顾”. 甲从新开的一箱中任选 2 瓶购买，设事件  $A$  表示“甲没有中奖”，事件  $B$  表示“甲获得一等奖”，事件  $C$  表示“甲中奖”，则（ ）

A. 事件  $A$  和事件  $B$  是对立事件      B. 事件  $A$  和事件  $C$  是对立事件  
C.  $P(B+C) = P(C)$       D.  $P(BC) = P(C)$

3. 据浙江省新高考规则，每名同学在高一学期结束后，需要从七门选考科目中选择其中三门作为高考选考科目. 某同学已经选择了物理、化学两门学科，还需要从生物、技术这两门理科学科和政治、历史、地理这三门文科学科共五门学科中再选择一门，设事件  $E =$ “选择生物学科”， $F =$ “选择一门理科学科”， $G =$ “选择政治学科”， $H =$ “选择一门文科学科”，现给出以下四个结论：

①  $G$  和  $H$  是互斥事件但不是对立事件；

②  $F$  和  $H$  是互斥事件也是对立事件；

③  $P(F) + P(G) = 1$ ；

④  $P(E \cup H) = P(E) + P(H)$ .

其中，正确结论的序号是\_\_\_\_\_.（请把你认为正确结论的序号都写上）

### 考查题型七 、事件的运算及其含义

1. 打靶 3 次，事件  $A_i$  表示“击中  $i$  发”，其中  $i = 0, 1, 2, 3$ . 那么事件  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$  表示（ ）

- A. 全部击中      B. 至少击中 1 发      C. 都未击中      D. 击中 3 发

2. 已知样本空间  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ , 事件  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$ , 则  $P(A \cup B) =$  ( )

- A.  $\frac{3}{4}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{4}$       D.  $\frac{1}{6}$

3. 已知事件  $A, B, C$  两两互斥, 若  $P(A) = \frac{1}{5}$ ,  $P(C) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{8}{15}$ , 则  $P(B \cup C) =$  ( ).

- A.  $\frac{8}{15}$       B.  $\frac{2}{3}$       C.  $\frac{7}{15}$       D.  $\frac{1}{3}$

4. 设  $A, B$  是一个随机试验中的两个事件, 记  $\bar{A}, \bar{B}$  为事件  $A, B$  的对立事件, 且

$$P(A) = 0.6, P(\bar{B}) = 0.3, P(\bar{A}B + A\bar{B}) = 0.5, \text{ 则 } P(\bar{A}\bar{B}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

5. 给出下列命题, 其中说法正确的是 ( )

- A. 若  $A, B$  为两个随机事件, 则  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$   
 B. 若事件  $A, B, C$  两两互斥, 则  $P(A) + P(B) + P(C) = 1$   
 C. 若  $A, B$  为互斥事件, 则  $P(A) + P(B) \leq 1$   
 D. 若  $A \subseteq B$ , 则  $P(A) < P(B)$

6. 口袋里装有 1 红, 2 白, 3 黄共 6 个形状大小完全相同的小球, 从中任取 2 球, 事件  $A$  = 取出的两球同色,  $B$  = 取出的 2 球中至少有一个黄球,  $C$  = 取出的 2 球中至少有一个白球,  $D$  = 取出两个球不同色,  $E$  = 取出的 2 球中至多有一个白球. 下列判断中正确的是 ( )

- A. 事件  $A$  与  $D$  为对立事件      B. 事件  $B$  与  $C$  是互斥事件  
 C. 事件  $C$  与  $E$  为对立事件      D. 事件  $P(C \cup E) = 1$

### 考查题型八 互斥事件

1. 从装有 4 个白球和 3 个红球的盒子里摸出 3 个球, 则以下哪个选项中的事件  $A$  与事件  $B$  互斥却不互为对立 ( )

- A. 事件  $A$ : 3 个球中至少有 1 个红球; 事件  $B$ : 3 个球中至少有 1 个白球  
 B. 事件  $A$ : 3 个球中恰有 1 个红球; 事件  $B$ : 3 个球中恰有 1 个白球  
 C. 事件  $A$ : 3 个球中至多有 2 个红球; 事件  $B$ : 3 个球中至少有 2 个白球  
 D. 事件  $A$ : 3 个球中至多有 1 个红球; 事件  $B$ : 3 个球中至多有 1 个白球

2. 某小组有 2 名男生和 1 名女生, 从中任选 2 名学生参加比赛, 事件“至少有 1 名男生”与事件“至少有 1 名女生” ( )

- A. 是对立事件      B. 都是不可能事件

- C. 是互斥事件但不是对立事件      D. 不是互斥事件

3. 已知事件  $A, B$  互斥, 它们都不发生的概率为  $\frac{1}{3}$ , 且  $P(A) = 2P(B)$ , 则  $P(\bar{A}) =$  ( )

- A.  $\frac{1}{3}$       B.  $\frac{4}{9}$       C.  $\frac{5}{9}$       D.  $\frac{2}{3}$

4. 下列说法正确的是 ( )

- A.  $A, B$  同时发生的概率一定比  $A, B$  中恰有一个发生的概率小  
 B. 若  $P(A) + P(B) = 1$ , 则事件  $A$  与  $B$  是对立事件  
 C. 当  $A, B$  不互斥时, 可由公式  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$  计算  $A \cup B$  的概率  
 D. 某事件发生的概率是随着实验次数的变化而变化的

5. 已知  $P(A) = 0.5$ ,  $P(B) = 0.3$ , 则下列说法中正确的是 ( )

- A. 如果  $B \subseteq A$ , 那么  $P(A \cup B) = 0.5$       B. 如果  $B \subseteq A$ , 那么  $P(AB) = 0.3$   
 C. 如果  $A, B$  互斥, 那么  $P(A \cup B) = 0.8$       D. 如果  $A, B$  互斥, 那么  $P(AB) = 0.15$

6. 已知事件  $A, B$  互斥, 它们都不发生的概率为  $\frac{1}{6}$ , 且  $P(A) = 2P(B)$ , 则  $P(\bar{A}) =$  ( )

- A.  $\frac{5}{18}$       B.  $\frac{13}{18}$       C.  $\frac{5}{9}$       D.  $\frac{4}{9}$

7. 袋子中有一些大小质地完全相同的红球、白球和黑球, 从中任意摸出一球, 摸出的球是红球或白球的概率为 0.56, 摸出的球是红球或黑球的概率为 0.68, 则摸出的球是白球或黑球的概率为 ( )

- A. 0.64      B. 0.72      C. 0.76      D. 0.82

8. 设  $A, B, C$  为三个随机事件, 其中  $A$  与  $B$  是互斥事件,  $B$  与  $C$  互为对立事件,  $P(A) = \frac{1}{4}$ ,  $P(C) = \frac{1}{3}$ , 则  $P(A \cup B) =$  \_\_\_\_\_.

### 提升练

(多选题) 1. 已知  $\Omega$  为实验  $E$  的样本空间, 随机事件  $\Omega' \subseteq \Omega$ , 则 ( )

- A.  $\Omega$  为必然事件, 且  $P(\Omega) = 1$       B.  $\emptyset$  为不可能事件, 且  $P(\emptyset) = 0$   
 C. 若  $P(\Omega') = 1$ , 则  $\Omega'$  为必然事件      D. 若  $P(\Omega') = 0$ , 则  $\Omega'$  不一定为不可能事件

2. 已知关于  $x$  的方程  $ax^2 + x + 1 = 0$ , 当  $a > m$  时, “该方程有实数解”是随机现象, 求  $m$  的范围.

3.  $S = \{x \mid |x+1| \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$ , 则  $S$  中:

(1) 恰含有两个样本点的事件有多少个? (2) 至少含有三个样本点的事件有多少个?



## 7.2.1 古典概型的概率计算公式

班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 小组\_\_\_\_\_

### 一、学习目标

- 1.理解古典概型的定义.
- 2.能计算古典概型中简单随机事件的概率.

### 二、重点、难点

掌握古典概型的定义、计算古典概型中简单随机事件的概率.

### 三、导学流程

#### 题型一、判断事件是否为基本事件

##### 解题技巧提炼

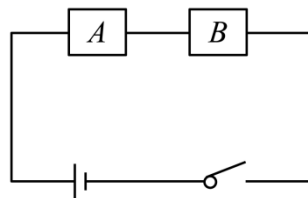
基本事件（也称为原子事件或简单事件）是一个仅在样本空间中单个结果的事件一个基本事件是一个单例。

1. 在抽查作业的试验中，下列各组事件都是基本事件的是（ ）  
A. 抽到第一组与抽到第二组                      B. 抽到第一组与抽到男学生  
C. 抽到女学生与抽到班干部                      D. 抽到班干部与抽到学习标兵
2. 下列说法错误的是（ ）  
A. 方差可以衡量一组数据的波动大小  
B. 抽样调查抽取的样本是否具有代表性，直接关系对总体估计的准确程度  
C. 一组数据的众数有且只有一个  
D. 抛掷一枚图钉针尖朝上的概率，不能用列举法求得
3. 以下结论中正确的有（ ）  
A. 投掷一枚骰子，事件“出现的点数至少是 5 点”和“出现的点数至多是 2 点”是互斥事件  
B. 投掷一枚硬币，事件“结果为正面向上”和“结果为反面向上”是对立事件  
C. 5 个阄中有一个是中签的阄，甲、乙两人同时各抽一个，事件“甲中签”和“乙中签”是对立事件  
D. 从两男两女四个医生中随机选出两人组建救援队，抽选结果的基本事件是“一男一女”、“两个男医生”、“两个女医生”，共三种
4. 从 1, 2, 3, ..., 10 中任意选一个数，这个试验的样本空间为\_\_\_\_\_，满足“它是偶数”样本点的个数为\_\_\_\_\_.
5. 基本事件的特点：一是任何两个基本事件是\_\_\_的；二是任何事件（除不可能事件）都可以表示成基本事件的 \_\_\_.

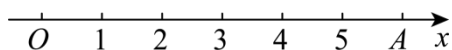
**题型二、写出基本事件****解题技巧提炼**

样本空间中的元素称为样本点.

6. 掷两枚质地均匀的骰子, 设事件  $A$  为掷出的两个骰子点数之和是 5, 则事件  $A$  发生的概率为 ( )
- A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{1}{6}$                       D.  $\frac{1}{9}$
7. 为了扎实推进“五大行动”, 学校为高一年级同学准备了形式多样的劳动课程. 有种植白菜、种植蕃茄、果树整枝和害虫防治 4 种课程, 小明要随机选报其中的 2 个, 则该试验中样本点的个数为 ( )
- A. 3                      B. 5                      C. 6                      D. 9
8. 下列说法正确的是 ( )
- A. 一名篮球运动员, 号称投篮“百发百中”, 则他投篮一次, 命中为必然事件
- B. 随机事件发生的可能性越大, 它发生的概率越接近 1
- C. 投掷两枚均匀的骰子, 观察出现的点数和, 点数和为 2 是一个样本点
- D. 试验“连续投掷一枚均匀的骰子直到出现 3 点停止, 观察投掷的次数”的样本空间为  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
9. 甲乙两人约定玩一种游戏, 把一枚均匀的骰子连续抛掷两次, 游戏规则有如下四种, 其中对甲有利的规则是 ( )
- A. 若两次掷出的点数之和是 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12 其中之一, 则甲获胜, 否则乙获胜
- B. 若两次掷出的点数中最大的点数大于 4, 则甲获胜, 否则乙获胜
- C. 若两次掷出的点数之和是偶数, 则甲获胜; 若两次掷出的点数之和是奇数, 则乙获胜
- D. 若两次掷出的点数是一奇一偶, 则甲获胜; 若两次掷出的点数均是奇数或者偶数, 则乙获胜
10.  $A$ 、 $B$  两个元件组成一个串联电路, 每个元件可能正常或失效. 设事件  $A$  = “ $A$  元件正常”,  $B$  = “ $B$  元件正常”, 用  $x_1$ 、 $x_2$  分别表示  $A$ 、 $B$  两个元件的状态, 用  $(x_1, x_2)$  表示这个串联电路的状态. 以 1 表示元件正常, 0 表示元件失效. 下列说法正确的是\_\_\_\_\_.
- ①样本空间  $\Omega = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ ;
- ②事件  $B = \{(0, 1), (1, 1)\}$ ;
- ③事件“电路是断路”可以用  $\bar{A} \cap \bar{B}$  (或  $\overline{AB}$ ) 表示;
- ④事件“电路是通路”可以用  $A \cup B$  (或  $A + B$ ) 表示, 共包含 3 个样本点.
11. 袋子中有 5 大小质地完全相同的球, 其中 2 个红球, 3 个黄球, 从中不放回地依次随机摸出 2 个球, 则摸出的 2 个球都是黄球的概率为\_\_\_\_\_.



12. 如图，数轴上  $O$  为原点，点  $A$  对应实数 6，现从 1, 2, 3, 4, 5 中随机取出两个数，分别对应数轴上的点  $B, C$ （点  $B$  对应的实数小于点  $C$  对应的实数）。



(1) 记事件  $E$  为：线段  $OB$  的长小于等于 2，写出事件  $E$  的所有样本点；

(2) 记事件  $F$  为：线段  $OB, BC, CA$  能围成一个三角形，求事件  $F$  发生的概率。

### 题型三、古典概型的特征

#### 解题技巧提炼

#### 古典概型的判断方法

判断一个试验是不是古典概型要抓住两点：一是有限性；二是等可能性。

13. 下列实验中，是古典概型的有（ ）

- A. 某人射击中靶或不中靶
- B. 在平面直角坐标系内，从横坐标和纵坐标都为整数的所有点中任取一个
- C. 四名同学用抽签法选一人参加会议
- D. 从区间  $[1, 10]$  上任取一个实数，求取到 1 的概率

14. 下列概率模型中，是古典概型的个数为（ ）

- ①从区间  $[1, 10]$  内任取一个数，求取到 1 的概率；②从 1, 2, 3, ..., 10 中任取一个数，求取到 1 的概率；
- ③在正方形  $ABCD$  内画一点  $P$ ，求点  $P$  恰好为正方形中心的概率；④向上抛掷一枚不均匀的硬币，求出现反面朝上的概率。

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

15. 下列不是古典概型的是（ ）

- A. 在 6 个完全相同的小球中任取 1 个

B.任意抛掷两颗骰子，所得点数之和作为样本点

C.已知袋子中装有大小完全相同的红色、绿色、黑色小球各 1 个，从中任意取出 1 个球，观察球的颜色

D.从南京到北京共有  $n$  条长短不同的路线，求某人正好选中最短路线的概率

16. 下列情境适合用古典概型来描述的是（ ）

A. 向一条线段内随机地投射一个点，观察点落在线段上不同位置

B. 五个人站一排，观察甲乙两人相邻的情况

C. 从一副扑克牌（去掉大、小王共 52 张）中随机选取 1 张，这张牌是红色牌

D. 某同学随机地向靶心进行射击，这一试验的结果只有有限个：命中 10 环，命中 9 环，命中 1 环和脱靶

17. (多选)下列试验是古典概型的是（ ）

A. 在适宜的条件下种一粒种子，发芽的概率

B. 口袋里有 2 个白球和 2 个黑球，这 4 个球除颜色外完全相同，从中任取一球为白球的概率

C. 向一个圆面内部随机地投一个点，该点落在圆心的概率

D. 老师从甲、乙、丙三名学生中任选两人作典型发言，甲被选中的概率

18. 暑假将至，小梁计划外出旅游，翻出自己曾经买的一个带数字密码锁的密码箱，但因时间太久，小梁已经忘记了密码，只记得这个密码是一个三位数，并且每个数位上的数字都是 7，8，9 中的一个.

(1)若小梁尝试输入一次密码，求输入的这个密码中恰有两位数字正确的概率；

(2)若在小梁通过技术获得了这个密码的首位数字后，小梁尝试输入一次密码，求输入的这个密码正确的概率.

## 7.2.2 古典概型的应用

### 【学习目标】

- 1.进一步理解古典概型的两大特点，能会从实际问题中识别古典概型模型；
- 2.进一步掌握古典概型的概率计算公式： $P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件个数}}{\text{总的基本事件个数}}$ ；
- 3.通过实例，理解互斥事件和对立事件的概念，了解互斥事件的概率加法公式，并能简单应用.

### 【教学重难点】

1. 正确理解掌握古典概型及其概率公式，古典概型中计算比较复杂的背景问题；
2. 互斥事件、概率的加法公式及其应用.

### 一、选择题

1. 古代《冰糖葫芦》算法题：一个小摊上摆满了五彩缤纷的“冰糖葫芦”，“冰糖葫芦”制作有两种，一种是 5 个山楂；另一种是 2 个山楂、3 个小桔子．若小摊上山楂共 640 个，小桔子共 360 个，现从小摊上随机选取一个“冰糖葫芦”，则这个“冰糖葫芦”是 5 个山楂的概率为（ ）

A . 0.3                      B . 0.4                      C . 0.5                      D . 0.6

2. 先后抛掷 3 枚均匀的硬币，至少出现一次反面的概率是（ ）

A .  $\frac{1}{8}$                       B .  $\frac{3}{8}$                       C .  $\frac{5}{8}$                       D .  $\frac{7}{8}$

3. 一张储蓄卡的密码共有 6 位数字，每位数字都可从 0~9 中任选一个.某人在银行自动取款机上取钱时，忘记了密码的最后一位数字，如果他记得密码的最后一位是偶数，则他不超过 2 次就按对的概率是（ ）

A .  $\frac{3}{4}$                       B .  $\frac{2}{5}$                       C .  $\frac{3}{5}$                       D .  $\frac{1}{2}$

4. 袋中装有外形相同的四个小球，四个球上分别标有 2，3，4，6 四个数，现从袋中随机取出两个球，则两球上数字之差的绝对值不小于 2 的概率为（ ）

A .  $\frac{1}{3}$                       B .  $\frac{1}{2}$                       C .  $\frac{2}{3}$                       D .  $\frac{5}{6}$

5、某英语初学者在拼写单词“*steak*”时，对后三个字母的记忆有些模糊，他只记得由“*a*”、“*e*”、“*k*”三个字母组成并且“*k*”只可能在最后两个位置，如果他根据已有信息填入上述三个字母，那么他拼写正确的概率为（ ）。

- A.  $\frac{1}{6}$                       B.  $\frac{1}{4}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{1}{2}$

6. 先后抛掷两枚均匀的正方体骰子（它们的各个面分别是标有点数1, 2, 3, 4, 5, 6），分别用骰子朝上的面的点数组成两位数，则这个两位数是质数的概率为（ ）

- A.  $\frac{1}{6}$                       B.  $\frac{2}{9}$                       C.  $\frac{5}{36}$                       D.  $\frac{7}{36}$

7. 一大型超市有奖促销活动中仅有特等奖、一等奖、二等奖、三等奖四个奖项，已知中特等奖的概率为0.02，中一等奖的概率为0.08，中二等奖的概率为0.12，中三等奖的概率为0.16，则不中奖的概率为（ ）

- A. 0.6                      B. 0.62                      C. 0.64                      D. 0.66

8. 抛掷一枚质地均匀的骰子，记事件  $A$  为“向上的点数是偶数”，事件  $B$  为“向上的点数不超过3”，则概率  $P(A \cup B) =$ （ ）

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{5}{6}$

9. 设  $A, B$  为两个随机事件，以下命题错误的为（ ）（多选题）

- A. 若  $A, B$  是对立事件，且  $P(A) = \frac{1}{5}$ ，则  $P(AB) = \frac{4}{25}$   
B. 若  $A, B$  是对立事件，则  $P(A \cup B) = 1$   
C. 若  $A, B$  是互斥事件， $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(B) = \frac{1}{2}$ ，则  $P(A \cup B) = \frac{1}{6}$   
D. 若  $A, B$  是互斥事件， $P(A) = \frac{1}{4}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ，则  $P(A \cup B) > \frac{1}{2}$

10. 设  $A, B$  为古典概率模型中的两个随机事件，以下命题正确的为（ ）（多选题）

- A. 若  $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(B) = \frac{1}{2}$ ，则当且仅当  $P(A+B) = \frac{5}{6}$  时， $A, B$  是互斥事件  
B. 若  $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(B) = \frac{2}{3}$ ，则  $A+B$  是必然事件  
C. 若  $A, B$  是互斥事件  $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(B) = \frac{1}{2}$ ，则  $P(A \cup B) = \frac{1}{6}$ ；  
D. 若  $A, B$  是对立事件，则  $P(A \cup B) = 1$ ；

## 二、填空题

11. 先后抛掷一枚均匀的正方体骰子(它们的六个面分别标有点数 1、2、3、4、5、6), 骰子朝上的面的点数分别为  $x$ ,  $y$ , 则事件  $\log_{2x} y = 1$  发生的概率为\_\_\_\_\_.

12. 已知  $a \in \{-1, 1\}$ ,  $b \in \{-3, 1, 2\}$ , 则直线  $ax + by - 1 = 0$  不经过第二象限的概率为\_\_\_\_\_.

13. 我国西部一个地区的年降水量在下列区间内的概率如下表所示:

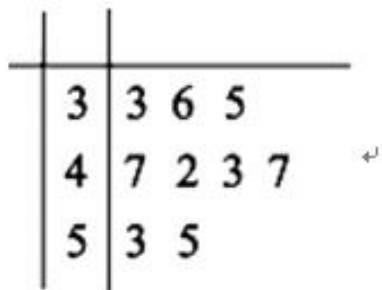
年降水量/mm	[ 100, 150 )	[ 150, 200 )	[ 200, 250 )	[ 250, 300 ]
概率	0.21	0.16	0.13	0.12

则年降水量在 [ 200, 300 ] (mm) 范围内的概率是\_\_\_\_\_

14. 有三个同样的箱子, A 箱中有 4 个黑球 1 个白球, B 箱中有 3 个黑球 3 个白球, C 箱中有 3 个黑球 5 个白球. 现任取一箱, 再从中任取一球, 则此球是白球的概率为\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

15. 某企业为了解该企业工人组装某产品所用时间, 对每个工人组装一个该产品的用时作了记录, 得到大量统计数据. 从这些统计数据中随机抽取了 9 个数据作为样本, 得到如图所示的茎叶图 (单位: 分钟). 若用时不超过 40 (分钟), 则称这个工人为优秀员工.



(1) 求这个样本数据的中位数和众数;

(2) 从样本数据用时不超过 50 分钟的工人中随机抽取 2 个, 求至少有一个工人是优秀员工的概率.

16、有  $n$  名学生，在一次数学测试后，老师将他们的分数（得分取正整数，满分为 100 分），按照  $[50, 60)$ ， $[60, 70)$ ， $[70, 80)$ ， $[80, 90)$ ， $[90, 100]$  的分组作出频率分布直方图（如图 1），并作出样本分数的茎叶图（如图 2）（图中仅列出了得分在  $[60, 70)$ ， $[90, 100]$  的数据）。

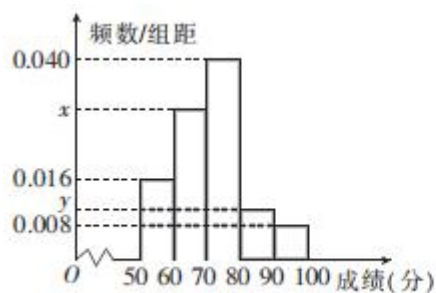


图 1

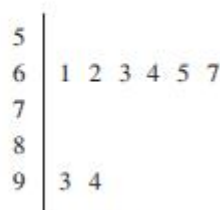


图 2

- (1) 求样本容量  $n$  和频率分布直方图中  $x$ 、 $y$  的值；
- (2) 从成绩在 80 分以上（含 80 分）的学生中随机抽取 2 名学生参加校数学竞赛，求所抽取的 2 名学生中至少有一人得分在  $[90, 100]$  内的概率；
- (3) 分数在  $[80, 100]$  的学生中，男生有 2 人，现从该组抽取三人“座谈”，求至少有两名女生的概率。

17. 袋中有 12 个小球，分别为红球、黑球、黄球、白球，从中任取一球，得到红球的概率是  $\frac{1}{4}$ ，得到黑球或黄球的概率是  $\frac{1}{2}$ ，得到黄球或白球的概率是  $\frac{7}{12}$ ，试求得到黑球、黄球、白球的个数分别是多少？



### §3 频率与概率

#### 【学习目标】

- 1.理解频率与概率的关系.
- 2.会用频率估计概率.

#### ◆ 知识点一 随机事件的频率及特点

- 1.频率是一个变化的量,但在大量重复试验时,它又具有稳定性,频率的值位于区间\_\_\_\_\_之间.
- 2.随着试验次数的增加,随机事件发生的频率摆动的幅度具有越来越小的趋势.
- 3.随机事件发生的频率也可能出现偏离“常数”较大的情形,但是随着试验次数的增加,频率偏离“常数”的可能性会减小.

#### 【诊断分析】 频率与试验次数有关吗?

#### ◆ 知识点二 随机事件的概率的定义

在相同条件下,大量重复进行同一试验时,随机事件  $A$  发生的频率通常会在\_\_\_\_\_附近摆动,即随机事件  $A$  发生的频率具有稳定性.这时,把这个常数叫作随机事件  $A$  的概率,记作  $P(A)$ .显然  $0 \leq P(A) \leq 1$ .

【诊断分析】 抛一枚硬币(质地均匀),连续出现 5 次正面向上,有人认为下次出现反面向上的概率大于  $\frac{1}{2}$ ,这种理解正确吗?

#### ◆ 探究点一 频率与概率的理解

例 1 (1)下列说法正确的是 ( )

- A.任何事件发生的概率总是在(0,1)内
- B.频率是客观存在的,与试验次数无关
- C.随着试验次数的增加,频率一般会越来越接近概率
- D.概率是随机的,在试验前不能确定

(2)(多选题)下列说法错误的是 ( )

- A.某人的投篮命中率为 40%,其含义是他每投 100 次球,一定能投中 40 次
- B.某人将一枚质地均匀的硬币连抛 30 次,出现正面朝上 20 次,则事件“正面向上”的概率为  $\frac{2}{3}$
- C.天气预报说某地明天下雪的概率为 80%,是指明天此地下雪的可能性为 80%

D.投掷一枚质地均匀的骰子 10 次,点数 1 向上出现了 2 次,则事件“点数 1 向上”的频率为 $\frac{1}{6}$

[素养小结]

(1)事件  $A$  出现的频数  $m$  与试验总次数  $n$  的比值即为事件  $A$  发生的频率,当事件  $A$  发生的频率 $\frac{m}{n}$ 稳定在某个常数时,这个常数即为事件  $A$  的概率.

(2)概率实际上是频率的科学抽象,求某事件的概率可以通过求该事件发生的频率而得之.

### ◆ 探究点二 利用频率与概率的关系求概率

例 2 表一和表二分别表示从甲、乙两个厂家随机抽取的某批篮球产品的质量检测情况:

表一

抽取球数 $n$	50	100	200	500	1000	2000
优等品数 $m$	45	92	194	470	954	1902
优等品频率 $\frac{m}{n}$						

表二

抽取球数 $n$	70	130	310	700	1500	2000
优等品数 $m$	60	116	282	637	1339	1806
优等品频率 $\frac{m}{n}$						

(1)分别计算表一和表二中篮球优等品的频率(结果保留到小数点后两位).

(2)若从两个厂家生产的这批篮球产品中各任取一个检测,则质量检测结果为优等品的概率分别是多少?

(3)若这两个厂家的篮球价格相同,你打算从哪一个厂家购货?

变式 某工厂为检测一批产品的质量,随机抽取了 100 件产品,检测结果如下表:

检测产品总数(件)	优秀品(件)	合格品(件)
100	80	17

注:每件产品的检测结果,要么是优秀品,要么是合格品,要么是不合格品.

现从这批产品中任取一件,记“该产品为优秀品”为事件  $A$ ,“该产品为合格品”为事件  $B$ ,“该产品为不合格品”为事件  $C$ ,试用频率估计  $P(A),P(B),P(C),P(\bar{C})$  的值.

[素养小结]

(1)概率可看作频率在理论上的期望值,它从数量上反映了随机事件发生的可能性的大小.当试验的次数越来越多时,频率越来越趋近于概率.当试验次数足够多时,所得频率就近似地看作随机事件的概率.

(2)通过公式  $f_n(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{m}{n}$  计算出频率,再由频率估算概率.

拓展 对一批衬衣进行质量抽检,检验结果如下表所示:

抽取件数	50	100	200	500	600	700	800
次品件数	0	20	12	27	27	35	40
次品频率	0	0.20	0.06	0.054			

(1)将上面统计表补充完整;

(2)记事件  $A$  表示“任取一件衬衣为次品”,试估计  $P(A)$ ;

(3)为了保证买到次品的顾客能够及时更换,若销售 1000 件衬衣,则至少需要进多少件衬衣?(计算结果保留整数)

课后训练:

1. 容量为 100 的样本数据,按从小到大的顺序分为 8 组,如下表:

组号	1	2	3	4	5	6	7	8
频数	10	13	$x$	14	15	13	12	9

第三组的频数和频率分别是 ( )

A. 14 和 0.14

B. 0.14 和 14

C.  $\frac{1}{14}$  和 0.14

D.  $\frac{1}{3}$  和  $\frac{1}{14}$

2. 甲、乙两所学校举行了某次联考,甲校成绩的优秀率为 30%,乙校成绩的优秀率为 35%,现将两所学校的成绩放到一起,已知甲校参加考试的人数占总数的 40%,乙校参加考试的人数占总数的 60%,现从中任取一个学生成绩,则取到优秀成绩的概率为 ( )

A. 0.165

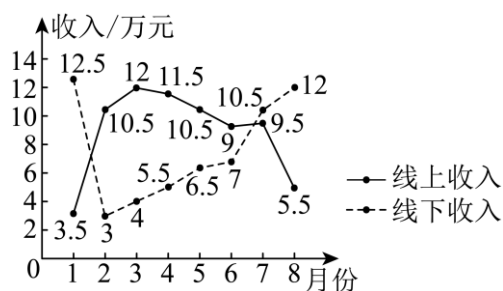
B. 0.16

C. 0.32

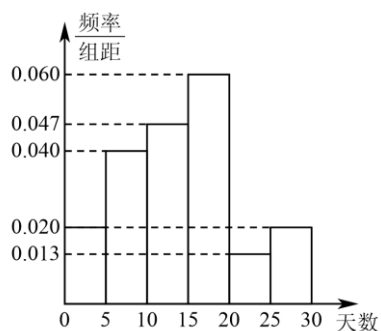
D. 0.33

3. 某商户收集并整理了 2023 年 1 月到 8 月线上和线下收入(单位:万元)的数据,并绘制

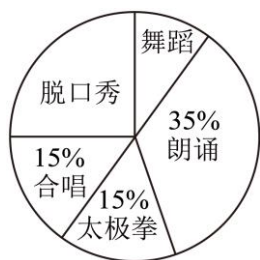
出如图所示的折线图，则下列结论错误的是（ ）



- A. 该商户这 8 个月中，收入最高的是 7 月
- B. 该商户这 8 个月的线上总收入低于线下总收入
- C. 该商户这 8 个月中，线上、线下收入相差最小的是 7 月
- D. 该商户这 8 个月中，月收入不少于 17 万元的频率是  $\frac{1}{2}$
4. 某工厂生产的产品的合格率是 99.99%，这说明（ ）
- A. 该厂生产的 10 000 件产品中不合格的产品一定有 1 件
- B. 该厂生产的 10 000 件产品中合格的产品一定有 9 999 件
- C. 该厂生产的 10 000 件产品中没有不合格的产品
- D. 该厂生产的产品合格的可能性是 99.99%
5. 下列说法正确的是（ ）
- A. 某人在玩掷骰子游戏，掷得数字 5 的概率是  $\frac{1}{6}$ ，则此人掷 6 次骰子一定能掷得一次数字 5
- B. 为了了解全国中学生的心理健康情况，应该采用普查的方式
- C. 一组数据 8, 8, 7, 10, 6, 8, 9 的众数和中位数都是 8
- D. 若甲组数据的方差  $S^2 = 0.01$ ，乙组数据的方差  $S^2 = 0.1$ ，则乙比甲稳定
6. 某滑冰馆统计了某小区居民在该滑冰馆一个月的锻炼天数，得到如图所示的频率分布直方图（将频率视为概率），则下列说法正确的是（ ）



- A. 该小区居民在该滑冰馆的锻炼天数在区间 $(25,30]$ 内的最少
- B. 估计该小区居民在该滑冰馆的锻炼天数超过 15 天的概率为 0.465
- C. 估计该小区居民在该滑冰馆的锻炼天数的中位数为 16
- D. 估计小区居民在该滑冰馆的锻炼天数的平均值为 15
7. 某年级组建了合唱、朗诵、脱口秀、舞蹈、太极拳五个社团，该年级共有 600 名同学，每名同学依据自己的兴趣爱好最多可参加其中一个，各个社团的人数比例的饼状图如图所示，其中参加合唱社团的同学有 75 名，参加脱口秀社团的有 125 名，则该年级（ ）



- A. 参加社团的同学的总人数为 600
- B. 参加舞蹈社团的人数占五个社团总人数的 15%
- C. 参加朗诵社团的人数比参加太极拳社团的多 120 人
- D. 从参加社团的同学中任选一名，其参加舞蹈或者脱口秀社团的概率为 0.35

## 7.4 事件的独立性

### 一、学习目标

- 1.理解两个随机事件独立性的含义
- 2.能进行一些与事件相互独立有关的概率运算

### 二、重点、难点

独立性事件的性质

### 题型一、独立事件的判断

#### 解题技巧提炼

#### 两个事件是否相互独立的判断

(1)定义法：由事件本身的性质直接判定两个事件发生是否相互影响。

(2)充要条件法：事件  $A, B$  相互独立的充要条件是  $P(AB)=P(A)P(B)$ 。

1. (22-23 高一下·江苏常州·期末) 设  $A, B$  为两个随机事件，以下命题正确的为 ( )

A. 若  $A, B$  是对立事件，则  $P(AB)=1$

B. 若  $A, B$  是互斥事件， $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{2}$ ，则  $P(A+B)=\frac{1}{6}$

C. 若  $P(\bar{A})=\frac{1}{3}, P(\bar{B})=\frac{1}{2}$ ，且  $P(AB)=\frac{1}{3}$ ，则  $A, B$  是独立事件

D. 若  $A, B$  是独立事件， $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{2}{3}$ ，则  $P(\overline{AB})=\frac{1}{9}$

2. (23-24 高一下·广东广州·期末) 甲、乙两名射击运动员进行射击比赛，甲的中靶概率为 0.8，乙的中靶概率为 0.9，设  $A$  = “甲中靶”， $B$  = “乙中靶”，则 ( )

A.  $A$  与  $B$ ， $A$  与  $\bar{B}$ ， $\bar{A}$  与  $B$ ， $\bar{A}$  与  $\bar{B}$  都相互独立

B.  $A\bar{B}$  与  $B\bar{A}$  是对立事件

C.  $P(\bar{A}\bar{B})=0.98$

D.  $P(AB \cup \bar{A}B \cup A\bar{B})=0.02$

3. (23-24 高一下·安徽六安·期末) 有 6 个相同的球，分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6，从中不放回的随机取两次，每次取 1 个球，事件  $A$  表示“第一次取出的球的数字是偶数”，事件  $B$  表示“第二次取出的球的数字是奇数”，事件  $C$  表示“两次取出的球的数字之和是偶数”，事件  $D$  表示“两次取出的球的数字之和是奇数”，则 ( )

A.  $A$  与  $B$  是互斥事件

B.  $C$  与  $D$  互为对立事件

C.  $B$  发生的概率为  $\frac{1}{2}$

D.  $B$  与  $C$  不相互独立

4. (24-25 高一下·全国·期末) 一只不透明的口袋内装有 9 张卡片，上面分别标有 1~9 这 9 个数字 (1 张卡

片上标 1 个数), “从中任抽取 1 张卡片, 结果卡片号或为 1 或为 4 或为 7”记为事件  $A$ , “从中任抽取 1 张卡片, 结果卡片号小于 7”记为事件  $B$ , “从中任抽取 1 张卡片, 结果卡片号大于 7”记为事件  $C$ . 下列说法正确的是 ( )

- A. 事件  $A$  与事件  $C$  互斥
- B. 事件  $B$  与事件  $C$  对立
- C. 事件  $A$  与事件  $B$  相互独立
- D.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

5. (23-24 高一下·云南曲靖·期末) 一只不透明的口袋内装有 9 张相同的卡片, 上面分别标有 1~9 这 9 个数字 (每张卡片上标 1 个数), “从中任意抽取 1 张卡片, 卡片上的数字为 2 或 5 或 8”记为事件  $A$ , “从中任意抽取 1 张卡片, 卡片上的数字不超过 6”记为事件  $B$ , “从中任意抽取 1 张卡片, 卡片上的数字大于等于 7”记为事件  $C$ . 则下列说法正确的是 ( )

- A. 事件  $A$  与事件  $C$  是互斥事件
- B. 事件  $B$  与事件  $C$  是对立事件
- C. 事件  $A$  与事件  $B$  相互独立
- D.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6. (23-24 高一下·天津·期末) 一个袋子中有大小和质地相同的 4 个球, 其中有 2 个红色球 (标号为 1 和 2), 2 个黑色球 (标号为 3 和 4), 采用不放回简单随机抽样的方法从袋中依次摸出 2 个球. 设事件  $A$  = “摸到的 2 个球颜色不相同”, 事件  $B$  = “摸到的 2 个球的数字之和大于 5”.

(1) 用集合的形式写出试验的样本空间, 并求  $P(A)$ ,  $P(B)$ ;

(2) 求  $P(AB)$ , 并说明事件  $A$  与  $B$  是否相互独立.

## 题型二、相互独立事件与互斥事件

7. (23-24 高一下·云南·期末) 已知甲盒中有 3 个大小和质地相同的小球, 标号为 1, 3, 4, 乙盒中有 3 个大小和质地相同的小球, 标号为 3, 4, 6, 现从甲、乙两盒中分别随机摸出 1 个小球, 记事件  $A$  = “摸到的两个小球标号相同”, 事件  $B$  = “摸到的两个小球标号之和为奇数”, 则 ( )

- A. 事件  $A$  和  $B$  相等
- B. 事件  $A$  和  $B$  互相对立
- C. 事件  $A$  和  $B$  相互独立
- D. 事件  $A$  和  $B$  互斥

8. (23-24 高一下·湖南郴州·期末) 下列说法中正确的是 ( )

- A. 用简单随机抽样的方法从含有 50 个个体的总体中抽取一个容量为 6 的样本, 则个体  $m$  被抽到的概率是 12%

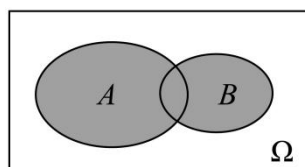
B. 连续抛硬币两次，第一次得正面，第二次得反面是两个独立事件

C. 数据 13,27,24,12,14,30,15,17,19,23 的第 70 百分位数是 23.5

D. 若样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  的标准差为 1，则数据  $3x_1 - 1, 3x_2 - 1, \dots, 3x_{10} - 1$  的标准差为 9

9. (23-24 高一下·福建莆田·期末) 如图是一个古典概型的样本空间  $\Omega$  和事件 A 和 B，其中  $n(\Omega) = 24$ ，

$n(A) = 12$ ， $n(B) = 8$ ， $n(A \cup B) = 16$ ，则 ( )



A.  $n(AB) = 8$

B.  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

C. 事件 A 与 B 相互独立

D. 事件 A 与 B 互斥

10. (23-24 高一下·湖北武汉·期末) 设 A, B 是一个随机试验的两个事件，则 ( )

A. 若 A, B 对立，则 A, B 一定互斥

B. 若  $A \subseteq B$ ，则  $P(AB) = P(B)$

C. 若  $P(AB) = P(A)P(B)$ ，则 A, B 相互独立

D. 若  $P(A) + P(B) = 1$ ，则 A, B 一定对立

11. (23-24 高一下·安徽黄山·期末) 甲、乙两名射击运动员进行射击比赛，每轮比赛甲、乙各射击一次，已知甲中靶的概率  $\frac{3}{4}$ ，乙中靶的概率为  $m$ ，每轮比赛中甲、乙两人射击的结果互不影响，若在一轮射击中，

恰好有一人中靶的概率为  $\frac{7}{20}$ ，则  $m =$ \_\_\_\_\_.

12. (23-24 高一下·福建福州·期末) 目前低碳的生活理念流行，越来越多的年轻人加入自行车骑游行列.某

自行车租车点的收费标准是每车每次租车时间不超过 1 小时免费，超过 1 小时的部分每小时收费 2 元（不足一小时的部分按一小时计算）.有甲、乙两人分别来该租车点租车骑游（各租一车一次），设甲、乙不超过 1 小时还车的概率分别为  $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{3}$ ；1 小时以上且不超过 2 小时还车的概率分别为  $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ；两人租车时间互不影响且都不会超过 3 小时.

(1)求甲、乙两人租车时间超过 2 小时，且不超过 3 小时的概率；



(2)求甲、乙两人所付的租车费用相同的概率；

(3)求甲、乙两人所付的租车费用之和为 4 元的概率

### 题型三、独立事件的乘法公式

13. (22-23 高一下·天津南开·期末) 为弘扬民族精神、继承传统文化，某校高二年级举办了以“浓情端午，粽叶飘香”为主题的粽子包制大赛. 已知甲、乙、丙三位同学在比赛中成功包制一个粽子的概率分别为  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,

$\frac{2}{5}$ ，且三人成功与否互不影响，那么在比赛中至少一人成功的概率为 ( )

- A.  $\frac{17}{20}$       B.  $\frac{31}{40}$       C.  $\frac{37}{40}$       D.  $\frac{19}{20}$

14. (23-24 高一下·宁夏固原·期末) 设  $A, B$  是两个概率大于 0 的随机事件，则下列结论正确的是 ( )

- A. 若事件  $A \subseteq B$ ，则  $P(A) \leq P(B)$   
B. 若  $A$  和  $B$  互斥，则  $A$  和  $B$  一定相互独立  
C. 若  $A$  和  $B$  相互独立，则  $A$  和  $B$  一定不互斥  
D.  $P(A \cup B) < P(A) + P(B)$

15. (23-24 高一下·安徽马鞍山·期末) 已知事件  $A, B$  满足:  $P(A)=0.5$ ,  $P(B)=0.3$ ，则 ( ) .

- A. 若  $A, B$  互斥，则  $P(A \cup B)=0.8$   
B. 若  $A, B$  互斥，则  $P(AB)=0.15$   
C. 若  $A, B$  互相独立，则  $P(A \cup B)=0.8$   
D. 若  $A, B$  互相独立，则  $P(AB)=0.15$

16. (22-23 高一下·甘肃·期末) 某商场在 618 大促销活动中，活动规则是：满 168 元可以参加促销摸奖活动，甲和乙两个箱子各装有 10 个球，其中甲箱中有 5 个红球、5 个白球，乙箱中有 8 个红球、2 个白球. 顾客首先掷一枚质地均匀的骰子，如果出现点数为 1 或 2，顾客从甲箱子随机摸出一个球；如果点数为 3, 4, 5, 6，从乙箱子随机摸出一个球，则摸出红球的顾客可以领取奖品，问顾客中奖率为\_\_\_\_\_.

17. (23-24 高一下·天津西青·期末) 天气预报端午假期甲地的降雨概率为 0.6，乙地的降雨概率为 0.3，假定在这段时间内两地是否降雨相互之间没有影响，则在这段时间内两地都不降雨的概率为\_\_\_\_\_.

18. (23-24 高一下·广西崇左·期末) 2024 年 5 月底，各省教育厅陆续召开了 2024 年高中数学联赛的相关工作. 若某市经过初次选拔后有甲、乙、丙三名同学成功进入决赛，在决赛环节中这三名同学同时解答一道有关

组合数论的试题.已知甲同学成功解出这道题的概率是 $\frac{3}{4}$ ，甲、丙两名同学都解答错误的概率是 $\frac{1}{12}$ ，乙、丙两名同学都成功解出的概率是 $\frac{1}{4}$ ，且这三名同学能否成功解出该题相互独立.

(1)求乙、丙两名同学各自成功解出这道题的概率；

(2)求这三名同学中不少于两名同学成功解出这道题的概率.

#### 题型四、独立事件的实际应用

19. (23-24 高一下·安徽六安·期末) 概率论起源于博弈游戏 17 世纪，曾有一个“赌金分配”的问题：博弈水平相当的甲、乙两人进行博弈游戏每局比赛都能分出胜负，没有平局双方约定，各出赌金 180 枚金币，先赢 3 局者可获得全部赌金；但比赛中途因故终止了，此时甲赢了 2 局，乙赢了 1 局.问这 360 枚金币的赌金该如何分配？数学家费马和帕斯卡都用了现在称之为“概率”的知识，合理地给出了赌金分配方案.该分配方案是（ ）

- A. 甲 180 枚，乙 180 枚
- B. 甲 288 枚，乙 72 枚
- C. 甲 240 枚，乙 120 枚
- D. 甲 270 枚，乙 90 枚

20. (21-22 高一下·浙江宁波·期末) 2022 年 2 月 6 日，中国女足在亚洲杯赛场上以 3:2 逆转击败韩国女足，成功夺冠.之前半决赛中，中国女足通过点球大战 6:5 惊险战胜日本女足.假设罚点球的球员等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向射门，门将也会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向来扑点球，而且即使方向判断正确也有 $\frac{1}{2}$ 的可能性扑不到球，不考虑其它因素，在一次点球大战中，门将在第一次射门就扑出点球的概率为（ ）

- A.  $\frac{1}{3}$
- B.  $\frac{1}{6}$
- C.  $\frac{1}{9}$
- D.  $\frac{1}{18}$

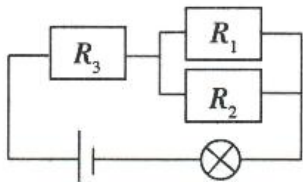
21. (21-22 高一下·安徽合肥·期末) 甲袋中有 8 个白球，4 个红球，乙袋中有 6 个白球，6 个红球，这些小球除颜色外完全相同，从甲、乙两袋中各任取 1 个球，则下列结论错误的是（ ）

- A. 2 个球颜色相同的概率为 $\frac{1}{2}$
- B. 2 个球不都是红球的概率为 $\frac{1}{3}$
- C. 至少有 1 个红球的概率为 $\frac{2}{3}$
- D. 2 个球中恰有 1 个红球的概率为 $\frac{1}{2}$

22. (22-23 高一下·江苏常州·期末) 在某项比赛中，两个水平相当的选手在决赛中相遇，决赛采用五局三胜制，胜者获得全部奖金，前 3 局打成 2:1 时比赛因故终止. 若发放奖金总额为 12000 元，为公平合理起见，

应该发放给已胜两场者奖金\_\_\_\_\_元.

23. (21-22 高一下·黑龙江哈尔滨·期末) 如图所示, 电路原件  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  正常工作的概率分别为  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ , 则电路能正常工作的概率为\_\_\_\_\_.



24. (23-24 高一下·甘肃庆阳·期末) 甲、乙两个篮球运动员互不影响的在同一位置各投球 10 次, 其中甲投进 5 个, 乙投进  $t$  个.

注: 用此次投进球的频率去估计概率.

- (1) 若乙投球 2 次均未命中的概率为  $\frac{4}{25}$ , 求  $t$ ;  
(2) 若  $t=8$ , 甲、乙两人各投球 2 次, 求两人共命中 2 次的概率.