

换底公式

学习目标：

1. 了解换底公式，能利用换底公式求对数值；
2. 能利用换底公式进行简单的化简证明；
3. 进一步渗透转化的数学思想，提升数学运算的核心素养.

考查题型一 利用对数的换底公式化简求值

1. 计算下列各式的值

(1) $\log_2 25 \cdot \log_3 4 \cdot \log_5 9$; (2) $(\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$.

2. 已知 $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$, 请用 a, b 表示下列各数的值:

(1) $\lg 6$; (2) $\log_3 8$; (3) $\log_2 24$; (4) $\lg \frac{27}{8}$.

3. 设 a, b, c 均为不等于 1 的正实数, 则下列等式中恒成立的是 ()

- A. $\log ab \cdot \log cb = \log ca$ B. $\log ab \cdot \log ca = \log cb$
C. $\log a(bc) = \log ab \cdot \log ac$ D. $\log a(b+c) = \log ab + \log ac$

4. 已知 $3^a = 4$, $b = \log_2 3$, 则 $ab =$ ()

- A. 2 B. 9 C. 4 D. 5

5. 已知一种放射性元素最初的质量是 500g, 按每年 10% 衰减, 则可求得这种元素的半衰期 (质量变到原有质量一半所需的时间) 为 () (已知

$\lg 2 = 0.3010$, $\lg 3 = 0.4771$, 结果精确到 0.1)

- A. 7.6 年 B. 7.8 年 C. 6.2 年 D. 6.6 年

6. 若 $3^x = 4^y = 6^z = k$, 且 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, 则实数 k 的值为_____.

考查题型二 利用对数的换底公式证明

1. 若实数 a 、 b 、 c 满足 $25^a = 403^b = 2015^c = 2019$ ，则下列式子正确的是

A. $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{2}{c}$ B. $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{c}$ C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$ D. $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$

2. 已知 $\log_5 3 = a, \log_5 4 = b$ ，求证： $\log_{25} 12 = \frac{1}{2}(a+b)$.

3. 设 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $\alpha \neq 0$ ，且 $a \neq 1$ ， $b \neq 1$ ，利用对数的换底公式证明：

(1) $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha \log_b a}$ ； (2) $\log_{a^\alpha} b^\beta = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b$.

4. 已知 $2^x = 3^y = 12^z \neq 1$ ，求证： $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$.

5. 设 $4^m = 36, 3^n = 6$ ，则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} =$ _____.

6. 已知 $2^a = 32, \log_a 2 \cdot \log_4 x = \frac{2}{5}a$ ，则 $\log_5 x + \log_x 5 =$ _____.

7. 已知 $2^x = 3$ ， $3^y = 4$ ，则 () (多选题)

A. $x < \frac{3}{2}$ B. $x > y$ C. $xy = 2$ D. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \sqrt{2}$

4.3.1 对数函数的概念

班级_____ 姓名_____ 小组_____

一、学习目标

- 1、理解对数函数概念
- 2、掌握对数函数的性质
- 3、掌握对数函数的图象和性质.

一、重点、难点

对数函数概念的理解

一、单选题

1. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & 0 < x < 1, \\ 4^{x-2}, & x \geq 1. \end{cases}$ 则 $f(f(1)) = (\quad)$

A. -4 B. -2 C. 2 D. 4
2. 若函数 $f(x) = (a^2 - 3a + 3)\log_a x$ 是对数函数, 则 a 的值是 (\quad)

A. 1 或 2 B. 1
C. 2 D. $a > 0$ 且 $a \neq 1$
3. 若函数 $f(x) = \log_2(x+a)$ 的图象过点 $(-2, 0)$, 则 $a = (\quad)$

A. 3 B. 1 C. -1 D. -3
4. 若函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - x, & x \leq 3 \\ \ln x - 2, & x > 3 \end{cases}$, 则 $f(f(e^2)) = (\quad)$

A. -1 B. -2 C. 1 D. $\ln 2 - 2$
5. 函数 $f(x) = \frac{1}{\log_2(-x^2 + 4x - 3)}$ 的定义域为 (\quad)

A. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ B. $(1, 2) \cup (2, 3)$ C. $(1, 3)$ D. $[1, 3]$
6. 已知 $a = \log_2 3$, $b = \log_3 5$, $c = \log_4 8$, 则 (\quad)

A. $a > b > c$ B. $c > b > a$ C. $a > c > b$ D. $b > a > c$
7. 函数 $y = \sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$ 的定义域为 (\quad)

A. $[1, +\infty)$ B. $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ C. $\left(\frac{3}{4}, 1\right]$ D. $\left(0, \frac{3}{4}\right]$
8. 在 $b = \log_{(3a-1)}(4-a^2)$ 中, 实数 a 的取值范围是 (\quad)

- A. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (2, +\infty)$ B. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 2\right)$
 C. $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ D. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

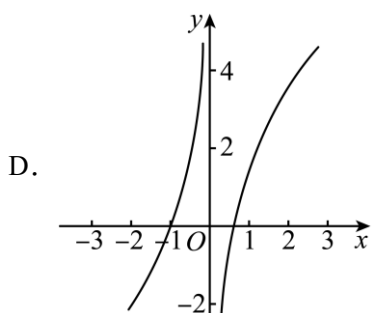
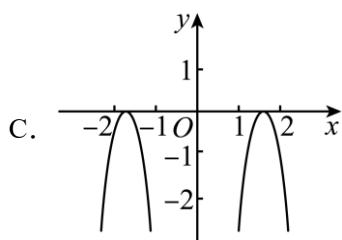
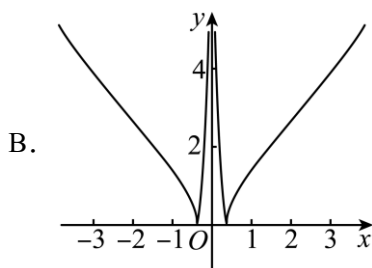
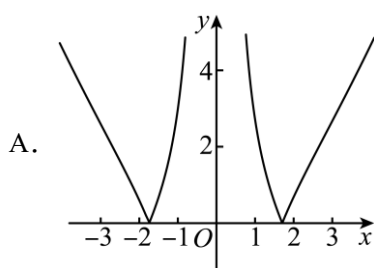
9. 若函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + a} - x)$ 为奇函数, 则 $f(0) + f(1) =$ ()

- A. 0 B. $\ln(\sqrt{2} - 1)$ C. $\ln(\sqrt{2} + 1)$ D. $\ln 2$

10. 若都不为零的实数 a, b 满足 $a > b$, 则 ()

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ C. $e^{a-b} > 1$ D. $\ln a > \ln b$

11. 函数 $f(x) = \frac{|3-x^2|}{\ln(x^2+1)}$ 的大致图象为 ()



12. 若 $f(x) = (x+a-1)\ln \frac{x-1}{x+1}$ 为偶函数, 则 $a =$ ()

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

13. 若函数 $f(x) = \log_3(ax^2 - x + 1)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ B. $(0, 1)$ C. $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ D. $(1, +\infty)$

14. 已知函数 $y = f(x+1)$ 的定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, 则函数 $y = f(\log_2 x)$ 的定义域为 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(0, 1)$ C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$ D. $[\sqrt{2}, 4]$

15. 函数 $y = \sqrt{\lg x} + \lg(5-3x)$ 的定义域是 ()

A. $\left[0, \frac{5}{3}\right)$ B. $\left[1, \frac{5}{3}\right)$ C. $\left[0, \frac{5}{3}\right]$ D. $\left[1, \frac{5}{3}\right]$

16. 函数 $f(x) = \lg \sqrt{10 - 2x^2}$ 的值域为 ()

A. $(-\infty, 1]$ B. $(0, 1]$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$

17. 若函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2mx + m + 2)$ 的值域为 \mathbf{R} ，则 m 的取值范围是 ()

A. $(-1, 2)$ B. $[-1, 2]$
C. $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

18. 已知集合 $A = \{y \mid y = \lg(x^2 - x - 2)\}$ ， $B = \{x \mid y = \sqrt{x^2 - x + 2}\}$ ，则 $A \cap B =$ ()

A. $(-1, 2)$ B. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ C. $(0, +\infty)$ D. \mathbf{R}

19. 已知函数 $y = e^x$ 的图象与函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称，则 $f(2e) =$ ()

A. $2e^2$ B. $2e$ C. $1 + \ln 2$ D. $\lg(2e)$

20. 若点 $P(16, 2), Q(t, \log_2 3)$ 都在同一个对数函数的图象上，则 t 等于 ()

A. 3 B. 6 C. 9

3.2-3.3 对数函数的图象和性质

班级_____ 姓名_____ 小组_____

一、学习目标

- 1、会画函数 $y = \log_2 x$ 的图象.
- 2、掌握函数 $y = \log_2 x, y = \log_a x$ 的图象和性质.
- 3、掌握对数函数的图象和性质.

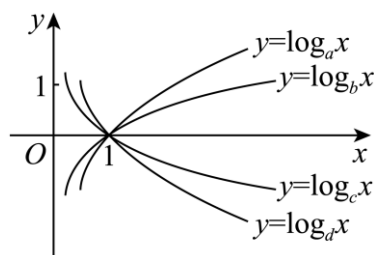
二、重点、难点

简单幂函数的图象性质及其应用。

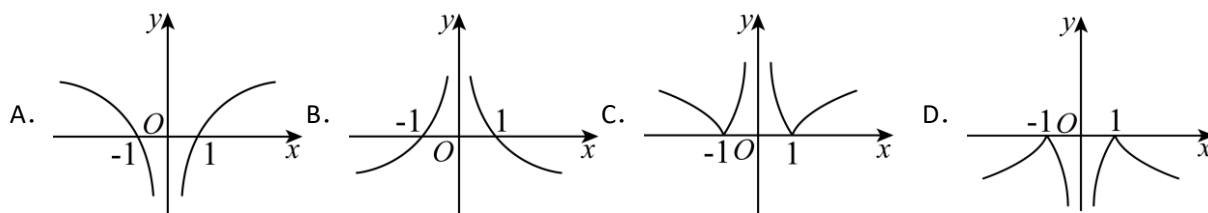
三、导学流程

考查题型一 判断对数型函数图象

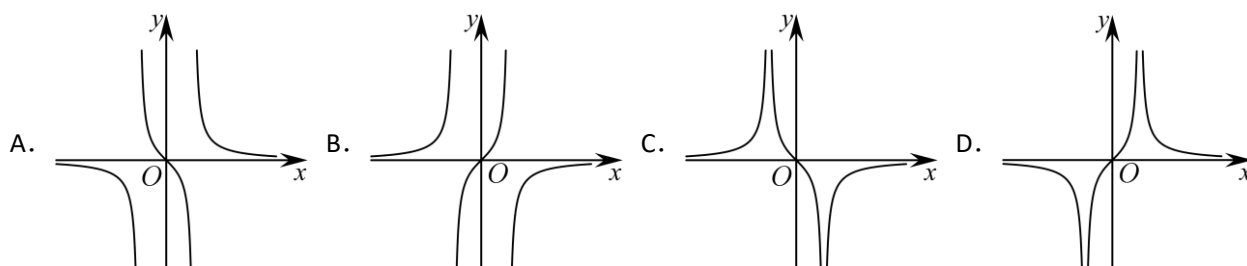
1. 如图所示的曲线分别是对数函数 $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$, $y = \log_d x$ 的图象, 则 a, b, c, d , 1, 0 的大小关系为_____ (用“>”号连接).



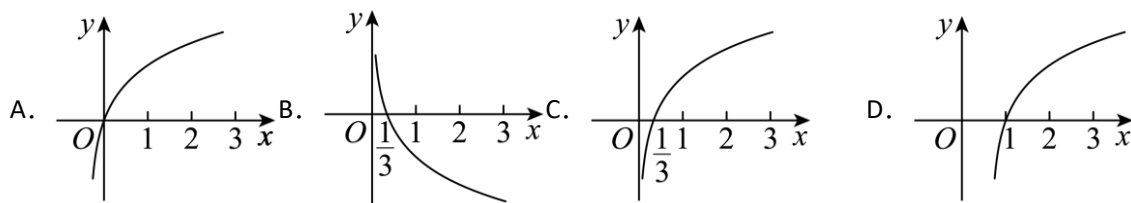
2. 若函数 $y = a^{|x|}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的值域为 $[1, +\infty)$, 则函数 $y = \log_a |x|$ 的大致图象是 ()



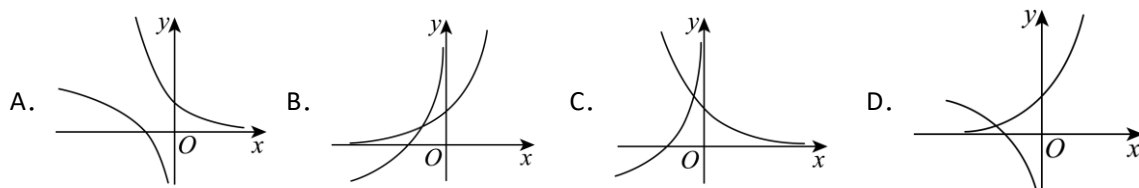
3. 函数 $f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x^2+1}-x)}{|1-x^2|}$ 的图象大致为 ()



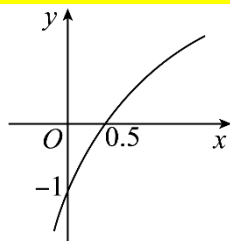
4. 如图，已知函数 $f(x) = 3^{x-1}$ ，则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的大致图像是（ ）



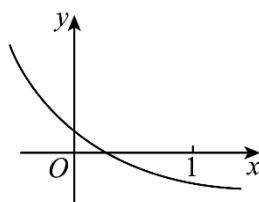
5. 已知 $a^x = b^{-x}$ ，函数 $y = \log_a(-x)$ 与 $y = b^x$ 的图像可能是（ ）



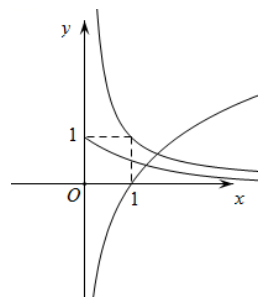
考查题型二 已知对数型函数图象，求参数的值或范围



第 1 题图



第 2 题图



第 3 题图

1. 已知函数 $y = \log_a(x+b)$ (a, b 为常数，其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象如图所示，则下列结论正确的是（ ）

A. $a = 0.5, b = 2$ B. $a = 2, b = 2$ C. $a = 0.5, b = 0.5$ D. $a = 2, b = 0.5$

2. 已知函数 $y = \log_a(x+c)$ (a, c 为常数，其中 $a > 0, a \neq 1$) 的图象如图所示，则下列结论成立的是（ ）

A. $a > 1, c > 1$ B. $a > 1, 0 < c < 1$ C. $0 < a < 1, c > 1$ D. $0 < a < 1, 0 < c < 1$

3. 已知函数 $y = x^a, y = b^x, y = \log_c x$ 的图象如图所示，则（ ）

A. $c^{-2} < \lg b < \left(\frac{1}{2}\right)^a$ B. $\lg b < \left(\frac{1}{2}\right)^a < c^{-2}$ C. $\lg b < c^{-2} < \left(\frac{1}{2}\right)^a$ D. $c^{-2} < \left(\frac{1}{2}\right)^a < \lg b$

4. (多选) 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{a}}(x+2)$ ($0 < a < 1$) 的图象一定过（ ）

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

考查题型三 对数型函数恒过定点问题

1. 函数 $y = \log_a(x-4)+2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 恒过定点（ ）

A. (4,2) B. (4,0) C. (5,0) D. (5,2)

2. 函数 $y = \log_a x + a^{x-1} + 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过的定点是 ()

- A. (1,2) B. (1,3) C. (2,2) D. (0,2)

3. 若函数 $y = \log_a(2x-3) + 8$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过点 P , 且点 P 在幂函数 $f(x)$ 的图象上, 则 $f(4) = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知直线 $y = mx + 2n$ 经过函数 $f(x) = \log_a(x-1) + 2$ 图象过的定点 (其中 m, n 均大于 0), 则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

考查题型四 比较对数式

1. 已知 $a = \ln \frac{1}{2}$, $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$, $c = 2^{-\frac{1}{2}}$, 则 ()

- A. $b > c > a$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

2. 已知 $a = \log_{0.7} 0.3$, $b = \log_{0.3} 0.7$, $c = 0.5$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < c < b$ B. $c < b < a$ C. $a < b < c$ D. $b < c < a$

3. 已知 $a = \log_4 2$, $b = \log_{10} 4$, $c = \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.2}$, 则下列判断正确的是 ()

- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $a < b < c$

4. 已知 $2 \times 3^a = 5 \times 7^b = 1$, 则 ()

- A. $a > b > -1$ B. $b > a > -1$ C. $a > -1 > b$ D. $b > -1 > a$

(多选题) 5. 若函数 $f(x) = x^2$, 设 $a = \log_5 4$, $b = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{3}$, $c = 2^{\frac{1}{5}}$, 则 $f(a), f(b), f(c)$ 的大小关系不正确的是 ()

- A. $f(a) > f(b) > f(c)$ B. $f(b) > f(c) > f(a)$
C. $f(c) > f(b) > f(a)$ D. $f(c) > f(a) > f(b)$

考查题型五 求对数型函数或对数型复合函数的定义域

1. 设集合 $A = \{x | \log_2 x < 2\}$, $B = \left\{x | \frac{x-1}{x-4} > 0\right\}$, 则 $A \cap B = ()$.

- A. (0,4) B. (4, +∞) C. (0,1) D. (-∞,1)

2. 函数 $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{3-x}} + \lg(x+4)$ 的定义域为_____.

3. 函数 $y = \sqrt{\log_2(x^2-3)}$ 的定义域为_____.

4. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\log_2 x - 1}$ 的定义域为_____.

5. 已知函数 $y = f(2x+e)$ 定义域为 $\left[0, \frac{e}{2}\right]$, 则函数 $y = f(\ln x)$ 的定义域为_____.

考查题型六 求对数型函数或对数型复合函数的值域

1. 函数 $y = 2 + \log_5 x (x \geq 1)$ 的值域为 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $[2, +\infty)$ D. $[3, +\infty)$

2. 若集合 $M = \{y | y = \ln(4-x^2)\}$, $N = [-2, 2]$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $[-2, 2]$ B. $(-2, 2)$ C. $(-\infty, 2]$ D. $[-2, \ln 4]$

3. 已知 $f(x) = (\log_2 x) \cdot \log_4 \frac{16}{x^2}$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 8\right]$, 则 $f(x)$ 的值域为 ()

- A. $[-3, 1]$ B. $[-1, 3]$ C. $[0, 1]$ D. $[-3, 0]$

4. 已知函数 $y = (\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x + 6$, 在 $x \in [2, 4]$ 上的值域为 ()

- A. $\left[\frac{15}{4}, 4\right]$ B. $[4, 6]$ C. $\left[\frac{15}{4}, 6\right]$ D. $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$

(多选题) 5. 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$ B. $f(x)$ 为奇函数
C. $f(x)$ 在定义域上是增函数 D. $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$

6. 函数 $f(x) = \log_2 x - 2 \log_2 (x+1)$ 值域为_____.

7. 若函数 $f(x) = \lg(x^2 - mx + 1)$ 的值域为 \mathbb{R} , 则实数 m 的取值范围是_____.

考查题型七 已知对数型函数或对数型复合函数的最值, 求参数

1. 已知函数 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 在 $[1, 4]$ 上的最大值是 2, 则 a 等于_____.

2. 设常数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 若函数 $y = \log_a (x+1)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 1, 最小值为 0, 则实数 $a =$ _____.

3. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{x}, & x \geq a, \\ \log_a x, & 0 < x < a. \end{cases}$ 有最小值, 则 a 的取值范围是_____.

4. 若不等式 $\log_a x - (\ln x)^2 < 4 (a > 0, a \neq 1)$ 对于任意 $x \in (1, e^3)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

5. 已知函数 $f(x) = \log_a (2+x) - \log_a (2-x) (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$.

(1)解关于 x 的不等式 $f(x) > 0$;

(2)当 $a > 1$ 时,若 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值为 2,求 a 的值.

考查题型八 求对数型函数或对数型复合函数的单调性

1. 若 $f(x) = |\log_2(1-x)|$ 在区间 M 上单调递增,则 M 可以是 ()

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-2, -1)$ C. $(-1, 0)$ D. $(0, 1)$

(多选题) 2. 已知函数 $f(x) = \lg(3x) - \lg(x-1)$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ B. $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减
C. $f(x)$ 的值域为 $(\lg 3, +\infty)$ D. $f(x)$ 图象关于点 $(1, 3)$ 中心对称

3. 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(4-x^2)$ 的严格增区间为_____.

4. (1) 求函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$ 的单调区间.

考查题型九、已知对数型函数单调性,求参数的取或取值范围

1. 已知集合 $A = \{x | \log_3(x+1) \leq 1\}$, $B = \{x | (x+3)(1-x) \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(-1, 1]$ B. $-3, 2$ C. $[-3, 1]$ D. $[1, 2]$

2. 函数 $y = f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数,且 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,若关于实数 t 的不等式

$f(\log_3 t) + f\left(\log_{\frac{1}{3}} t\right) > 2f(2)$ 恒成立,则 t 的取值范围是 ()

3. 已知函数 $f(x) = \log_a(x+1) - \log_a(1-x)$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

(1)求 $f(x)$ 的定义域;

(2)当 $a > 1$ 时,求使 $f(x) > 0$ 的 x 的解集.

4. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & x < 1 \\ 2^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$, 则不等式 $f(x) > 2$ 的解集为_____.

5. 不等式 $\log_2(x-1) - \log_4(3x-5) > 0$ 的解集为_____.

6. 不等式 $\log_a(2x+3) > \log_a(5x-6)$, ($a > 1$) 的解集为_____.

7. 若函数 $f(x) = \log_a x$ (其中 a 为常数, 且 $a > 0, a \neq 1$) 满足 $f(2) > f(3)$, 则 $f(2x-1) < f(2-x)$ 的解集是_____.

考查题型十 对数型函数的单调性、奇偶性综合应用

1. 下列函数中与函数 $y = e^x - e^{-x}$ 的定义域、单调性与奇偶性均一致的是 ()

A. $y = |x-1|$ B. $y = x^3$ C. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ D. $y = \log_2 x$

2. 设函数 $y = f(x)$ 的图象与 $y = 3^{x+m}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 若 $f(3) + f(9) = 1$, 实数 m 的值为_____.

3. 若函数 $f(x) = \lg(ax + \sqrt{x^2 + 1})$ 是 R 上的奇函数, 则 a 的值为_____.

4. 已知函数 $f(x) = \log_a(1-2x) - \log_a(1+2x)$ ($a > 0, a \neq 1$).

(1)求 $f(x)$ 的定义域;

(2)判断 $f(x)$ 的奇偶性并予以证明;

(3)求使 $f(x) > 0$ 的 x 的取值范围.

5. 已知函数 $f(x) = \log_a \frac{2+3x}{2-3x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1)求 $f(x)$ 的定义域, 判断 $f(x)$ 的奇偶性并给出证明;

(2)若 $f(2m-1) + f(3m-2) < 0$, 求实数 m 的取值范围.

考查题型十一 对数型函数模型的应用

1. 中国的5G技术世界领先, 其数学原理之一便是著名的香农公式: $C = W \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)$. 它表示: 在受噪声干扰的信道中, 最大信息传递速率 C (单位: bit/s) 取决于信道宽度 W (单位: HZ)、信道内信号的平均功率 S (单位: dB)、信道内部的高斯噪声功率 N (单位: dB) 的大小, 其中 $\frac{S}{N}$ 叫做信噪比, 按照香农公式, 若信道宽度 W 变为原来2倍, 而将信噪比 $\frac{S}{N}$ 从1000提升至4000, 则 C 大约增加了 () (附: $\lg 2 \approx 0.3$)

A. 110% B. 120% C. 130% D. 140%

2. 声音的等级 $f(x)$ (单位: dB) 与声音强度 x (单位: W/m^2) 满足 $f(x) = 10 \times \lg \frac{x}{1 \times 10^{-12}}$. 喷气式飞机起飞时, 声音的等级约为140dB; 一般说话时, 声音的等级约为60dB, 那么喷气式飞机起飞时声音强度约为一般说话时声音强度的 ()

- A. 10^5 倍 B. 10^8 倍 C. 10^{10} 倍 D. 10^{12} 倍

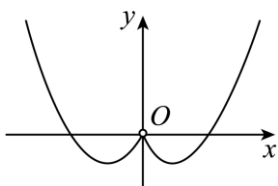
3. 某林区的木材蓄积量每年平均比上一年增长 10%，若要求林区的木材蓄积量高于当前蓄积量的 3 倍，则至少需要经过_____年。（参考数据：取 $\lg 3 = 0.48$, $\lg 11 = 1.041$ ）

（二）提升练

1. 已知函数 $f(x) = 1 + \log_3 x$, $x \in [1, 9]$, 则函数 $y = [f(x)]^2 + f(x^2)$ 的值域为_____.

2. 若不等式 $x^2 - \log_a(x+1) < 2x - 1$ 在 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

3. 如图所示为函数 $f(x)$ 的图像, 则其解析式可能为 ()



- A. $f(x) = (x^2 - x^{-2}) \ln|x|$ B. $f(x) = |2^x - 2^{-x}| \ln|x|$ C. $f(x) = x^2 - |x| (x \neq 0)$ D. $f(x) = \frac{x^3 + x}{|x|}$

4. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 则不等式 $f\left(\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)\right) > f(\log_3 8)$ 的解集为_____.

5. 已知函数 $f(x) = \log_a(kx^2 - 2x + 6)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

(1) 若函数的定义域为 \mathbf{R} , 求实数 k 的取值范围;

(2) 是否存在实数 k , 使得函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上为增函数, 且最大值为 2? 若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

4.4 指数函数、幂函数、对数函数增长的比较

班级_____ 姓名_____ 小组_____

一、学习目标

- 1、通过作图,借助数学软件体会并了解指数函数、幂函数、对数函数的增长特性.
- 2、掌握幂函数与对数函数、幂函数与指数函数的增长差异,并能解决相关问题.
- 3、能正确的选择函数模型解决实际问题

二、重点、难点

1、三类函数增长的结论,函数增长快慢比较的常用方法

2、通过数据分析表述函数增长快慢的理由.

三、导学流程

题型一、函数模型的增长差异

1. 当 x 越来越大时,下列函数中,增长速度最快的应该是

- A. $y=100x$ B. $y=\log_{100}x$ C. $y=x^{100}$ D. $y=100^x$

2. 设 $f(x)=x^2, g(x)=2^x, h(x)=\log_2x$, 当 $x \in (4, +\infty)$ 时,对这三个函数的增长速度进行比较,下列结论中,错误的是 ()

- A. $f(x)$ 的增长速度最快, $h(x)$ 的增长速度最慢 B. $g(x)$ 的增长速度最快, $h(x)$ 的增长速度最慢
C. $g(x)$ 的增长速度最快, $f(x)$ 的增长速度最慢 D. $f(x)$ 的增长速度最快, $g(x)$ 的增长速度最慢

题型二、指数函数、对数函数与幂函数模型的增长比较

3. 已知函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=\log_2x$ 的反函数.

(1)求 $y=f(x)$ 的解析式;

(2)若 $x \in (0, +\infty)$, 试分别写出使不等式:

① $\log_2x < 2^x < x^2$; ② $\log_2x < x^2 < 2^x$ 成立的自变量 x 的取值范围.

题型三、根据实际问题增长率选择合适的函数模型

4. (2024 高二下·浙江杭州·学业考试) 有一组实验数据如表, 则体现这组数据的最佳函数模型是 ()

x	2	3	4	5	6
y	1.40	2.56	5.31	11	21.30

A. $y = \sqrt{x}$ B. $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x$ C. $y = \log_2 x$ D. $y = 2x - 3$

题型四 列出对数函数模型的解析式

5. (21-22 高一上·四川成都·期中) 人们常用里氏震级 M_e 表示地震的强度, E_s 表示地震释放出的能量, 其关系式可以简单地表示为 $M_e = \frac{2}{3} \lg E_s - 4.8$, 2021 年 1 月 4 日四川省乐山市犍为县发生里氏 4.2 级地震, 2021 年 9 月 16 日四川省泸州市泸县发生里氏 6.0 级地震, 则后者释放的能量大约为前者的 () 倍. (参考数据: $10^{0.3} \sim 2.00, 10^{0.7} = 5.01$)

A. 180 B. 270 C. 500 D. 720

6. 随着人们健康水平的不断提高, 某种疾病在某地的患病率以每年 10% 的比例降低, 若要将当前的患病率降低到原来的一半, 需要的时间至少是 () ($\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 3 \approx 0.4771$)

A. 6 年 B. 7 年 C. 8 年 D. 9 年

7. (21-22 高一·全国·课后作业) 大西洋鲑鱼每年都要逆流而上, 游回产地产卵. 记鲑鱼的游速为 $V(\text{m/s})$, 鲑鱼的耗氧量的单位数为 Q , 研究中发现 V 与 $\log_3 \frac{Q}{100}$ 成正比, 且当 $Q=900$ 时, $V=1$.

(1) 求出 V 关于 Q 的函数解析式;

(2) 计算一条鲑鱼的游速是 1.5 m/s 时耗氧量的单位数.

题型五、利用对数函数的性质综合解题

8. (21-22 高一上·山东·阶段练习) 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{1+9x^2} - 3x) + 1$, 则 $f(\lg 5) + f\left(\lg \frac{1}{5}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. (23-24 高一上·江苏扬州·阶段练习) 对于函数 $f(x) = \ln\left(\frac{2}{x} + a\right)$.

(1) 若方程 $f(x) = \ln[(a-6)x + 2a - 8]$ 恰有一个实根, 求实数 a 的取值范围;

(2) 设 $a > 0$, 若对任意 $b \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, 当 $x_1, x_2 \in [b, b+1]$ 时, 满足 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \ln 2$, 求实数 a 的取值范围.

10. (23-24 高一上·江西赣州·阶段练习) 已知函数: $f(x) = \log_2(ax^2 + 2x - 1)$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 过定点 $(1, 2)$, 求 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 若 $f(x)$ 值域为 \mathbf{R} , 求 a 的取值范围.

题型六、简单的指数方程

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \lg x & (x > 0) \\ 2^x & (x \leq 0) \end{cases}$, 若 $f(m) = \frac{1}{2}$, 则 $m =$ ()

A. $\sqrt{10}$

B. -1

C. 0

D. $\sqrt{10}$ 或 -1

12. (22-23 高一下·上海黄浦·期末) 已知 $y = 2^x + a \cdot 2^{-x}$ ($a \in \mathbf{R}$)

(1) 讨论该函数的奇偶性;

(2) 当该函数为偶函数时, 记 $y = f(x)$, 若方程 $f(2x) - kf(x) = 3$ 在 $x \in [0, 1]$ 上有实根, 求实数 k 的取值范围.

题型七、简单的对数方程

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & x > 0, \\ |x+1|, & x \leq 0. \end{cases}$ 若 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$ (x_1, x_2, x_3, x_4 互不相等), 则 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

的取值范围是 (注: 函数 $h(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增) ()

A. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

B. $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

C. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$

D. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

14. 解方程:

(1) $\left(\frac{1}{8}\right)^{2x} = 4^{2-x}$; (2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-5) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 2$.

5.1.1 利用函数性质判断方程解的存在性

一、学习目标

- 1.理解求方程 $f(x)=0$ 的实数解就是求函数 $f(x)$ 的零点，体会函数的作用
- 2.通过结合图像与解函数零点问题，培养数学抽象、数学运算素养

二、重点、难点

理解零点存在定理

三、导学流程

【题型 1：求函数的零点】

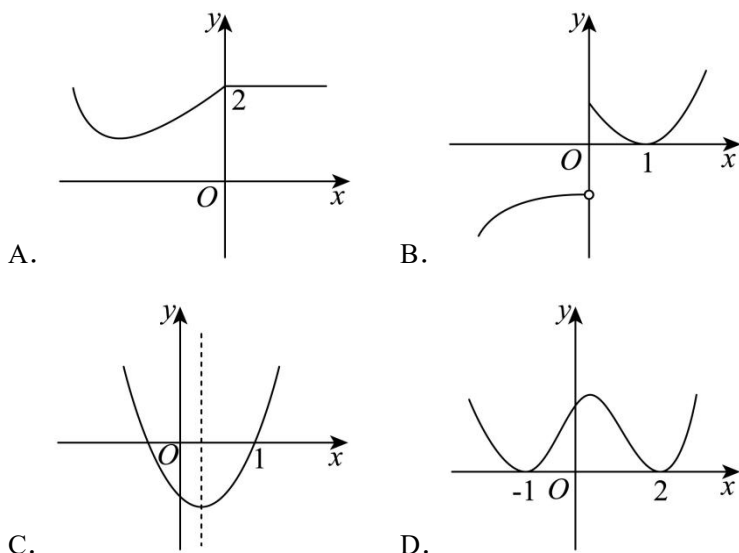
例 1. (24-25 高一上·湖南长沙·阶段练习) 函数 $y = x^2 + 3x + 2$ 的零点是 ()

- A. (1,0), (2,0) B. 1, 2 C. (-1,0), (-2,0) D. -1, -2

变式 1. (24-25 高一上·全国·随堂练习) 函数 $f(x) = \log_2 x$ 的零点是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

变式 2. (24-25 高一上·上海·随堂练习) 下列图象表示的函数中没有零点的是 ()



【题型 2：零点的存在性定理】

例 2. (24-25 高一上·全国·课后作业) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 具有单调性，且 $f(a)f(b) < 0$ ，则方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[a, b]$ 上 ()

- A. 至少有一实根 B. 至多有一实根
C. 没有实根 D. 有且只有一实根

变式 1. (23-24 高一下·湖南·期中) 函数 $f(x) = x^3 + 2^x - 50$ 的零点所在区间为 ()

- A. (1,2) B. (2,3) C. (3,4) D. (4,5)

变式 2. (23-24 高一下·河南漯河·期末) 函数 $f(x) = \ln x + x^2 + a$ ，则“ $a < -1$ ”是“函数 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 上存在零点”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 充分必要条件
C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

变式 3. (24-25 高一上·上海·课堂例题) 下列区间中存在方程 $x^5 - x - 1 = 0$ 的根的是 ()

- A. $[0,1]$ B. $[1,2]$ C. $[3,4]$ D. $[4,5]$

变式 4. (24-25 高一上·上海·课后作业) 若函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象为连续不断的一条曲线, 则下列说法正确的有 _____. (填序号)

- ①若 $f(a)f(b) > 0$, 则不存在实数 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$;
②若 $f(a)f(b) < 0$, 则有且只有一个实数 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$;
③若 $f(a)f(b) > 0$, 则可能存在实数 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$;
④若 $f(a)f(b) < 0$, 则可能不存在实数 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) = 0$.

【题型 3: 根据零点判断函数值的符号】

例 3. (20-21 高一上·江西景德镇·期中) 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(-2, 2)$ 上的图象是连续不断的, 且方程 $f(x) = 0$ 在 $(-2, 2)$ 上仅有一个实根 $x = 0$, 则 $f(-1)f(1)$ 的值 ()

- A. 大于 0 B. 小于 0 C. 等于 0 D. 与 0 的大小关系无法确定

变式 1. (19-20 高一上·浙江·期中) 已知实数 x_0 是函数 $f(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x}$ 的一个零点, 若 $0 < x_1 < x_0 < x_2$, 则 ()

- A. $f(x_1) < 0, f(x_2) < 0$ B. $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$
C. $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$ D. $f(x_1) > 0, f(x_2) > 0$

变式 2. (17-18 高一上·北京海淀·期中) 已知 x_0 是函数 $f(x) = 2^x + x - 1$ 的一个零点, 若 $x_1 \in (-1, x_0)$, $x_2 \in (x_0, +\infty)$, 则 ()

- A. $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$ B. $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$
C. $f(x_1) > 0, f(x_2) > 0$ D. $f(x_1) < 0, f(x_2) < 0$

【题型 4: 根据零点求参数】

例 4. (24-25 高一上·江苏南通·阶段练习) 二次函数 $y = x^2 + x + m$ 有零点的充要条件的是 ().

- A. $m \geq \frac{1}{4}$ B. $m \leq \frac{1}{4}$ C. $m > \frac{1}{4}$ D. $m < \frac{1}{4}$

变式 1. (23-24 高一上·四川达州·期中) “ $a = -1$ ”是“函数 $y = ax^2 + 2x - 1$ 只有一个零点”的 ()

- A. 充要条件 B. 必要不充分条件

C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

变式 2. (24-25 高一上·全国·课后作业) 已知函数 $y = 2x^2 + bx + c$ 的两个零点分别为 $-2, 1$, 则函数的解析式为 ()

A. $y = 2x^2 - 2x - 4$ B. $y = 2x^2 + 2x - 4$

C. $y = 2x^2 - 2x + 4$ D. $y = 2x^2 + 2x + 4$

变式 3. (23-24 高一上·北京大兴·期末) 已知函数 $f(x) = x + \log_2 x - 4$ 的零点为 x_1 , $g(x) = x + \log_a(x - 1) - 5 (a > 1)$ 的零点为 x_2 , 若 $x_2 - x_1 > 1$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(1, \sqrt{2})$ B. $(\sqrt{2}, 2)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, +\infty)$

变式 4. (多选) (23-24 高一上·陕西西安·阶段练习) 已知函数 $f(x) = |2^x - 4| - a$ 恰有两个零点, 则实数 a 可以是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【题型 5: 根据零点所在区间求参数】

例 5. (23-24 高一上·湖南株洲·期末) 若方程 $(x - 1)\lg(x + 1) = 1$ 的实根在区间 $(k, k + 1) (k \in \mathbb{Z})$ 上, 则 $k =$ ()

A. -1 B. 2 C. -1 或 2 D. 1

变式 1. (多选) (23-24 高一上·河南郑州·期中) 若二次函数 $y = x^2 - 2x + m$ 的一个零点恰落在 $(-1, 0)$ 内, 则实数 m 的值可以是 ()

A. -3 B. -2 C. -1 D. 1

变式 2. (23-24 高一上·江苏无锡·期末) 函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x + 2$ 的零点在区间 (e^k, e^{k+1}) , $k \in \mathbb{Z}$, 则 $k =$ _____.

变式 3. (23-24 高一上·安徽亳州·期末) 若函数 $f(x) = 2^x - \frac{1}{x} + a$ 在区间 $(1, 2)$ 上存在零点, 则常数 a 的取值范围为 _____.

变式 4. (23-24 高一上·山西晋中·期末) 已知函数 $f(x) = 3ax^2 - 2x + 1 - a$ 在区间 $(-1, 1)$ 内恰有一个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

变式 5. (20-21 高一上·内蒙古赤峰·期末) 若函数 $f(x) = x^2 - 2mx - 1$ 在 $[-1, 2)$ 上有两个零点, 则 m

【题型 6: 根据零点个数求参数】

例 6. (23-24 高一上·福建宁德·阶段练习) 若函数 $f(x) = x^2 - ax + 1$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点, 则 a 的取值范围是 ()

A. $a > 2$ 或 $a < -2$ B. $-2 < a < 2$

C. $a \neq \pm 2$ D. $1 < a < 3$

变式 1. (21-22 高一上·陕西渭南·期末) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x > 0 \\ \frac{1}{2} - \left| \frac{1}{2} + x \right|, & x \leq 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方

程 $f(x) = kx - k$ 至少有两个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围为 ()

A. $[1, +\infty)$ B. $\left[-\frac{1}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

C. $\left[-\frac{1}{3}, 1\right)$ D. $\left[\frac{1}{3}, 1\right)$

变式 2. (23-24 高一上·安徽·期末) 已知数 $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 4, \end{cases}$ 若 $m < n$ 且 $f(n) = f(m)$, 则

$n + m$ 的取值范围是 ()

A. $(1, 2]$ B. $\left[0, \frac{9}{4}\right]$ C. $\left(\frac{3}{4}, 2\right]$ D. $\left(\frac{3}{4}, 2\right)$

变式 3. (24-25 高一上·江苏淮安·开学考试) 若关于 x 的方程 $x^2 - 4|x| - 5 = k + 1$ 有两解, 则 k 的取值范围是_____.

变式 4. (24-25 高一上·甘肃兰州·阶段练习) 设函数 $y = ax^2 - (2a + 1)x + 2$.

(1) 若该函数有且只有一个零点, 求 a 的值;

(2) 当 $a > 0$ 时, 求关于 x 的不等式 $ax^2 - (2a + 1)x + 2 < 0$ 的解集.

【题型 7: 复合函数零点】

例 7. (24-25 高一上·湖南邵阳·开学考试) 已知函数 $f(x) = \left|x - \frac{1}{x}\right| - \left|x + \frac{1}{x}\right| + 3$, 若关于 x 的方程 $f^2(x) - (a + 8)f(x) - a = 0$ 有 8 个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围为 ()

A. $\left(-4, -\frac{15}{4}\right)$ B. $\left[-\frac{15}{4}, 0\right)$ C. $(-4, 0)$ D. $\left(-4, -\frac{7}{2}\right)$

变式 1. (22-23 高一下·江西宜春·开学考试) 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^{|x|} + 1$, 若关于 x 的方程 $2f^2(x) - (2a + 3)f(x) + 3a = 0$ 有 4 个不同的根, 则 a 的取值范围 ()

A. $(1, 2)$ B. $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$ C. $\left(0, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ D. $\left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

变式 2. (23-24 高一下·云南·期末) 设 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 2, & x \leq 0 \\ |\log_2 x|, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - (a + 2)f(x) + 2a = 0$ 恰有 5 个不同实数解, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[1, 2]$ B. $(2, 3]$ C. $(2, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$