

正道年级国庆数学试卷 4

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知直线 $ax+by-1=0$ 在 y 轴上的截距为 -1 ，且它的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ ，则 $a-b=$ ()

- A. 0 B. 1 C. -2 D. 2

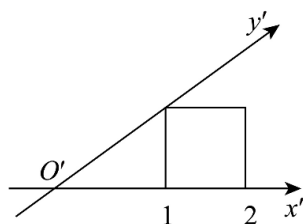
2. 侧面积为 2π 的圆锥，它的侧面展开图是一个半圆，则该圆锥的底面半径为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ C. 2 D. 1

3. 圆 $C_1:(x+1)^2+(y+1)^2=4$ 和圆 $C_2:(x-2)^2+(y-3)^2=9$ 的公切线的条数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 如图，一个水平放置的平面图形的直观图（斜二测画法）是一个边长为 1 的正方形，则这个平面图形的面积是 ()



- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1

5. 已知 m, n 是两条不同的直线， α, β 是两个不重合的平面，则下列命题正确的是 ()

- A. 若 $m//n, m//\alpha, n//\beta$ ，则 $\alpha//\beta$ B. 若 $\alpha//\beta, m//\alpha, n\subset\beta$ ，则 $m//n$
C. 若 $m\perp n, m\perp\alpha, n\perp\beta$ ，则 $\alpha\perp\beta$ D. 若 $\alpha\perp\beta, m//\alpha, n//\beta$ ，则 $m\perp n$

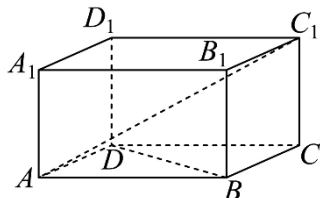
6. 点 $P(-2,-1)$ 到直线 $l:(1+3\lambda)x+(1+\lambda)y-2-4\lambda=0(\lambda\in\mathbb{R})$ 的距离最大时，其最大值以及此时的直线方程分别为 ()

- A. $\sqrt{13}$; $3x+2y-5=0$ B. $\sqrt{11}$; $3x+2y-5=0$
C. $\sqrt{13}$; $2x-3y+1=0$ D. $\sqrt{11}$; $2x-3y+1=0$

7. 过点 $P(0,-1)$ 作直线 l ，若直线 l 与连接 $A(-2,1), B(2\sqrt{3},1)$ 两点的线段总有公共点，则直线 l 的倾斜角范围为 ()

- A. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ B. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right]$ C. $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ D. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

8. 如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=8$ ， $AD=6$ ，异面直线 BD 与 AC_1 所成角的余弦值为 $\frac{1}{5}$ ，则该长方体外接球的表面积为（ ）



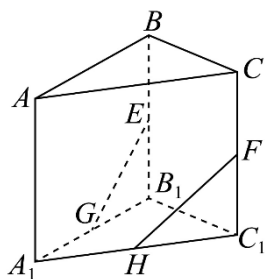
- A. 90π B. 196π C. 784π D. $\frac{1372}{3}\pi$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知直线 $l_1: x+(a-1)y+1=0$ ，直线 $l_2: ax+2y+2=0$ ，则下列结论正确的是（ ）

- A. l_1 在 x 轴上的截距为 -1 B. l_2 过定点 $(0, -1)$
C. 若 $l_1 \parallel l_2$ ，则 $a = -1$ 或 $a = 2$ D. 若 $l_1 \perp l_2$ ，则 $a = \frac{2}{3}$

10. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， E, F, G, H 分别为 $BB_1, CC_1, A_1B_1, A_1C_1$ 的中点，则下列说法正确的是（ ）



- A. E, F, G, H 四点共面 B. $EF \parallel GH$
C. EG, FH, AA_1 三线共点 D. $\angle EGB_1 = \angle FHC_1$

11. 已知实数 x, y 满足曲线 C 的方程 $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ ，则下列选项正确的是（ ）

- A. $x^2 + y^2$ 的最大值是 $\sqrt{3} + 1$
B. $\frac{y+1}{x+1}$ 的最大值是 $2 + \sqrt{6}$
C. $|x - y + 3|$ 的最小值是 $2\sqrt{2} - \sqrt{3}$
D. 过点 $(0, \sqrt{2})$ 作曲线 C 的切线，则切线方程为 $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知圆台的高为 4，上底面半径为 2，下底面半径为 5，则该圆台的体积为_____.

13. 长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中， $AB=4, BC=3, BB'=5$ ，一只蚂蚁从点 A 出发沿表面爬行到点 C' ，蚂蚁爬行的最短路线的长为_____.

14. 已知圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=25$ ，直线 $l:(2m+1)x+(m-1)y-m+4=0$ ，当圆 C 被直线 l 截得的弦长最短时，直线 l 的方程为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(2,3)$ ， $B(1,2)$ ， $C(4,-4)$.

(1) 求 BC 边上的高所在直线 l_1 的方程；

(2) 若直线 l_2 过点 C ，且点 A ， B 到直线 l_2 的距离相等，求直线 l_2 的方程.

16. 已知圆 P 在 x 轴上截得线段长为 4，在 y 轴上截得线段长为 $4\sqrt{3}$.

(1) 求圆心 P 的轨迹方程；

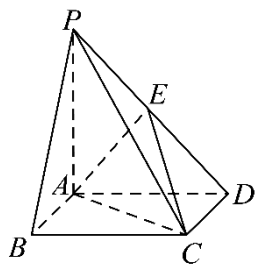
(2) 若 P 点到直线 $y=x$ 的距离为 $\sqrt{2}$ ，求圆 P 的标准方程.

17. 已知圆 $O:x^2+y^2=4$.

(1) 过点 $P(2,1)$ 向圆 O 引切线，求切线 l 的方程；

(2) 记圆 O 与 x 、 y 轴的正半轴分别交于 A ， B 两点，动点 Q 满足 $QA=\sqrt{2}QB$ ，问：动点 Q 的轨迹与圆 O 是否有两个公共点？若有，求出公共弦长；若没有，说明理由.

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PA = AD = 2$ ，点 E 为线段 PD 的中点.



- (1) 求证: $PB \parallel$ 平面 AEC ;
- (2) 求证: $AE \perp$ 平面 PCD ;
- (3) 求三棱锥 $A-PCE$ 的体积.

19. 设直线 l 的方程为 $(a+1)x + y - 5 - 2a = 0 (a \in \mathbb{R})$.

- (1) 求证: 不论 a 为何值, 直线 l 必过一定点 P ;
- (2) 若直线 l 分别与 x 轴正半轴, y 轴正半轴交于点 $A(x_A, 0)$, $B(0, y_B)$, 当 $\triangle AOB$ 面积最小时, 求此时的直线方程;
- (3) 当直线 l 在两坐标轴上的截距均为正整数且 a 也为正整数时, 求直线 l 的方程.